Hjälpmedel: Beta, Standard math. tabels, typgodkänd räknedosa

MATEMATIK

Chalmers tekniska högskola

Telefon: Axel Målqvist, 0740–459022

2002–01–19 kl. 14.15-19.15

TMA132 Fourieranalys F2/Kf2, 5 poäng

OBS! Ange namn, personnummer samt linje och inskrivningsår.

---

1. Bestäm det polynom $P(x)$ av högst andra graden som minimerar

$$\int_{-1}^{1} \left[(1-\sqrt{|x|}) - P(x)\right]^2 dx. \qquad (6p)$$

2. Lös randvärdesproblemet (c är konstant),

$$\begin{cases} cu_x + u_y + 2yu = 0, & -\infty < x < \infty, \quad y > 0, \\ u(x,0) = f(x), & -\infty < x < \infty, \end{cases} \qquad (6p)$$

Ledning: Fouriertransformera i x-led.

3. Utveckla $f(x)$ i cosinusserie med perioden 2π, där

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x), & 0 < x < \pi/2, \\ 0, & x > \pi/2. \end{cases} \qquad (6p)$$

4. Lös värmeledningsekvationen

$$\begin{cases} u_{xx} = u_t - 2, & 0 < x < 1, & t > 0, \\ u(0,t) = 1, & u_x(1,t) + u(1,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = 0, & 0 < x < 1. \end{cases} \qquad (6p)$$

5. Låt f vara en funktion i $L^1(\mathbb{R})$. Definiera

$$F(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x + 2k\pi). \qquad (6p)$$

a) Visa att F är 2π periodisk.

b) Härled ett samband mellan F:s Fourierkoefficienter och f:s Fouriertransform.

c) Bevisa (under lämpliga förutsättningar) *Poissons Summationsformel:*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(2k\pi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n).$$

6. Lös Laplaces ekvation $u_{xx} + u_{yy} = 0$ i halvcirkelskivan $x^2 + y^2 < 1, y > 0$, om $u = 0$ på sträckan $y = 0, -1 \leq x \leq 1$ och $u = y^3$ på halvcirkeln $x^2 + y^2 = 1$, $y \geq 0$. (6p)

7. Låt $\{\varphi_n\}_1^\infty$ vara en ortonormalmängd i $L^2(a,b)$. Visa att följande villkor är ekvivalenta:

a) Om $< f, \varphi_n >= 0$, för alla n, så är $f = 0$.

b) För varje $f \in L^2(a,b)$ är $f = \sum_{n=1}^{\infty} < f, \varphi_n > \varphi_n$ med konvergens i norm.

c) För varje $f \in L^2(a,b)$ gäller $||f||^2 = \sum_{n=1}^{\infty} | < f, \varphi_n > |^2$. (7p)

8. Visa Fouriers inversionssats, då f och $\hat{f}$ tillhör L^1. (7p)

MA

Lösningar Fourieranalys, F2/Kf2, 5 poäng, 2002-01-19

① Bästa approx. som minimera integralen fås genom Legendre polynom utveckling:

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{N} c_n P_n(x), \quad \text{där } f(x) = 1-\sqrt{|x|} \ \& \ c_n = \frac{1}{\|P_n(x)\|^2}\int_{-1}^{1} P_n(x) f(x)\,dx,$$

$P_0(x)=1$, $P_1(x)=x$, $P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$, $P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$, ...

$$\|P_n(x)\|^2 = \frac{2}{2n+1} \Rightarrow c_n = (n+\tfrac{1}{2})\int_{-1}^{1} P_n(x) f(x)\,dx \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{c_0}} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1-\sqrt{|x|})\,dx = \int_0^1 (1-\sqrt{x})\,dx = \left[x - \frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

$$\underline{\underline{c_1}} = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1}(1-\sqrt{|x|})\,x\,dx = \{\text{udda integrand \& symm. intervall}\} = \underline{\underline{0}}.$$

$$\underline{\underline{c_2}} = \frac{5}{2}\int_{-1}^{1}(1-\sqrt{|x|})\cdot\frac{1}{2}(3x^2-1)\,dx = \frac{5}{2}\int_0^1 (1-x^{1/2})(3x^2-1)\,dx = \frac{5}{2}\int_0^1(-3x^{5/2}+3x^2+x^{1/2}-1)$$

$$= \frac{5}{2}\left[-\frac{6}{7}x^{7/2}+x^3+\frac{2}{3}x^{3/2}-x\right]_0^1 = \frac{5}{2}\left(\frac{2}{3}-\frac{6}{7}\right) = \underline{\underline{-\frac{10}{21}}}$$

För 2^a-grads polynom $N=2$ & $P(x) = c_0P_0(x)+c_1P_1(x)+c_2P_2(x)$

<u>Svar:</u> $\underline{\underline{P(x)}} = \frac{1}{3}+0-\frac{5}{21}(3x^2-1) = \underline{\underline{\frac{1}{7}(4-5x^2)}}$. ▨

---

②
$$\begin{cases} cu_x + u_y + 2yu = 0, & x\in\mathbb{R},\ y>0 \quad (DE) \\ u(x,0) = f(x) & (RV) \end{cases} \xrightarrow[\text{i } x\text{-led}]{\mathcal{F}\text{-transf}} \begin{cases} c(i\xi)\hat{u} + \hat{u}_y + 2y\hat{u} = 0; & (DE)^\wedge \\ \hat{u}(\xi,0) = \hat{f}(\xi); & (RV)^\wedge \end{cases}$$

$$(DE)^\wedge \Rightarrow \hat{u}_y = (-2y - ic\xi)\hat{u} \xrightarrow{\hat{u}\neq 0} \frac{\hat{u}_y}{\hat{u}} = -2y - ic\xi \xrightarrow{\int dy}$$

$$\ln\hat{u} = -y^2 - ic\xi y \Rightarrow \hat{u}(\xi,y) = Ce^{-y^2-ic\xi y}$$

$$(RV)^\wedge \Rightarrow C = \hat{f}(\xi), \Rightarrow \hat{u}(\xi,y) = e^{-y^2}\cdot e^{-ic\xi y}\hat{f}(\xi)$$

Invers $\mathcal{F}$-transf. $\Rightarrow$

<u>Svar:</u> $\underline{\underline{u(x,y) = e^{-y^2}f(x-cy)}}$. ▨

③ För utveckling av $f(x)$ i cosinusserie definierar vi $f(x)$ även för $x<0$, så att $f(x)$ blir en jämn funktion. Vi har då

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx, \text{ där}$$

$$\pi a_k = 2\int_0^{\pi/2} \sin x \cos kx \, dx = \int_0^{\pi/2} [\sin(k+1)x - \sin(k-1)x]\, dx$$

$$= \left[\frac{\cos(k-1)x}{k-1} - \frac{\cos(k+1)x}{k+1}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\cos(k-1)\frac{\pi}{2}}{k-1} - \frac{\cos(k+1)\frac{\pi}{2}}{k+1} - \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k+1};$$ för $k \neq 1$.

Då är $\pi a_{2n} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1} = \frac{-2}{4n^2-1}$, och

$$\pi a_{2n+1} = \frac{\cos(n\pi)-1}{2n} - \frac{\cos(n+1)\pi - 1}{2n+2} = \frac{(-1)^n - 1}{2n} - \frac{(-1)^{n+1}-1}{2n+2},$$ vilket ger

$$\pi a_{4m+1} = \frac{(-1)^{2m}-1}{4m} - \frac{(-1)^{2m+1}-1}{4m+2} = \frac{1}{2m+1}, \text{ och}$$

$$\pi a_{4m+3} = \frac{(-1)^{2m+1}-1}{4m+2} - \frac{(-1)^{2m+2}-1}{4m+4} = -\frac{1}{2m+1}.$$

Vidare är $\pi a_0 = 2\int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = \left[2\cos x\right]_0^{\pi/2} = 2$, och

$$\pi a_1 = \int_0^{\pi/2} 2\sin x \cos x \, dx = \int_0^{\pi/2} \sin 2x \, dx = \left[-\frac{\cos 2x}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Alltså är

Svar: $$f(x) \sim \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi}\cos x + \frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2m+1}\left(\cos(4m+1)x - \cos(4m+3)x\right) - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2nx)}{4n^2-1}.$$

④

$$
\begin{array}{ll}
(DE) & \begin{cases} u_{xx} = u_t - 2, & 0<x<1,\ t>0 \\ u(0,t)=1,\ u_x(1,t)+u(1,t)=0, & t>0 \\ u(x,0)=0, & 0<x<1 \end{cases} \\
(RV1,2) & \\
(BV) &
\end{array}
$$

<u>Lösning</u>: Inhomogen diff.ekv + Randvillkor. Sätt $u(x,t)=S(x)+v(x,t)$, där $S''(x)=-2$, $S(0)=1$, $S'(1)+S(1)=0$. Härav $\underline{S(x)=1+x-x^2}$.

Insättning i (DE)+(RV1,2), samt (BV) $\Rightarrow$

$$
\begin{cases} v_{xx} = v_t, & 0<x<1,\ t>0 & (DE)' \\ v(0,t)=0,\ v_x(1,t)+v(1,t)=0, & t>0 & (RV1,2)' \\ v(x,0)=x^2-x-1, & 0<x<1, & (BV)'. \end{cases}
$$

Ekv + randvillkor för $v(x,t)$ är homogena. Sätt $v(x,t)=X(x)T(t)\neq 0$ i $(DE)'$ får $X''T=XT' \Rightarrow \{\text{mult. m. } \frac{1}{XT}\} \Rightarrow \frac{X''}{X}=\frac{T'}{T}=\lambda<0$.

St-L. problem: $X''(x)=\lambda X(x)$; $X(0)=0$, $X'(1)+X(1)=0$;

har allmänna lösningen $X(x)=A\cos(\beta x)+B\sin(\beta x)$, $(\lambda=-\beta^2,\ \beta>0)$

$X(0)=0 \Rightarrow A=0$, $\quad X'(1)+X(1)=0 \Rightarrow B\beta\cos\beta+B\sin\beta=0$ dvs $\tan\beta=-\beta$.

Alltså egenfunktioner till St.L problem är $\underline{\underline{X_n(x)=\sin(\beta_n x)}}$, $n=1,2,\ldots$

där β_n är de positiva rötterna till ekvationen $\tan\beta=-\beta$.

Ekvationen för T: $T'(t)=\lambda T(t)$ ger $T_n'(t)=-\beta_n^2 T_n(t)$, vars allmänna lösning är $\underline{\underline{T_n(t)=C_n e^{-\beta_n^2 t}}}$. Alltså

$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(t)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\beta_n^2 t}\sin(\beta_n x)$; Satisf $(DE)'+(RV1,2)'$.

$(BV)'$ är uppfyllt om $\underline{\underline{x^2-x-1=\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(\beta_n x)}}$. $\quad (*)$

Mult $(*)$ med $\sin(\beta_k x)$ & $\int_0^1 \ldots dx \Rightarrow \int_0^1 (x^2-x-1)\sin(\beta_k x)\,dx = \begin{cases} C_k\int_0^1 \sin^2\beta_k x, & n=k \\ 0, & n\neq k \end{cases}$

$= C_k\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4\beta_k}\sin(2\beta_k)\right) = C_k\,\frac{2+\beta_k^2}{2(1+\beta_k^2)} \Leftarrow$ (Vi har då utnyttjat $\tan\beta_k=-\beta_k$)

Koefficienterna C_k bestämms då av

$$C_k=\frac{2(1+\beta_k^2)}{2+\beta_k^2}\int_0^1 (x^2-x-1)\sin(\beta_k x)\,dx=\ldots=\frac{2\sqrt{1+\beta_k^2}}{\beta_k^2(2+\beta_k^2)}\left[2(-1)^k-(2+\beta_k^2)\sqrt{1+\beta_k^2}\right],$$

<u>Svar</u>: $\underline{\underline{u(x,t)=1+x-x^2+\sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{-\beta_k^2 t}\sin(\beta_k x)}}$. ▨

⑤ a $F(x)=\sum_{-\infty}^{\infty} f(x+2k\pi) \Rightarrow F(x+2\pi)=\sum_{-\infty}^{\infty} f(x+2(k+1)\pi)=\sum_{-\infty}^{\infty} f(x+2k\pi)=F(x)$.

$\therefore$ F 2π-periodisk.

b $$\underline{\underline{C_n(F)}}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)e^{-inx}\,dx=\frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+2k\pi)e^{-inx}\,dx \quad ①$$

$$=\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{(2k-1)\pi}^{(2k+1)\pi}f(x)e^{-inx}\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-inx}\,dx=\underline{\underline{\frac{\hat{f}(n)}{2\pi}}} \quad ②$$

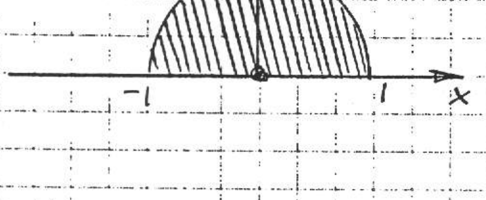
c $$\underline{\underline{\sum_{-\infty}^{\infty}f(2k\pi)}}=F(0)=\sum_{-\infty}^{\infty}C_n(F)e^{in0}=\underline{\underline{\frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)}}$$ ▨

Obs! För omkastningen av summation och integration i ① räcker det att $\sum f(x+2k\pi)$ konvergerar i $L^1(-\pi,\pi)$, vilket följer om $f\in L^1(\mathbb{R})$. ▨

---

⑥

Området ges av $0\le r\le 1$, $0\le\varphi\le\pi$.



I variablerna r,φ har vi problemet:

$$\begin{array}{ll} (DE) & \frac{1}{r}(ru_r)_r+\frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi}=0, \quad 0<r<1, \quad 0<\varphi<\pi \\ (RV)_\varphi & u(r,0)=u(r,\pi)=0, \quad \left[\text{sträckan } y=0, \begin{array}{l}0\le x\le 1\\ -1\le x\le 0\end{array}\right] \\ (RV)_r & u(1,\varphi)=\sin^3\varphi \quad [u=y^3 \text{ då } r^2=x^2+y^2=1] \\ & u(0,\varphi) \quad [\text{Existerar [t.ex. är } u(0,0)=u(0,\pi)=0] \end{array}$$

Var-Sep: Ansätt $u(r,\varphi)=R(r)\,\Phi(\varphi)\neq 0$. Insättning i (DE):

$$\frac{1}{r}(ru_{rr}+u_r)=-\frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi}\Rightarrow -\Phi(r^2R''+rR')=R\Phi'' \xRightarrow{\left\{\cdot\frac{1}{R\Phi}\right\}} -\frac{r^2R''+rR'}{R}=\frac{\Phi''}{\Phi}=\lambda$$

Lösning för Φ: $\begin{cases}\Phi''=\lambda\Phi\\ \Phi(0)=\Phi(\pi)=0\end{cases} \Rightarrow$ Egenpar: $\begin{cases}\lambda_n=-n^2, \ n=1,2,\ldots\\ \Phi_n(\varphi)=\sin(n\varphi)\end{cases}$

Lösning för R: $r^2R''+rR'-n^2R\overset{(*)}{=}0$ är en Euler diff-ekv.

Den löses antingen med substitutionen $\ln r=t$ eller med ansättningen $R(r)=r^\alpha$ [(DE) för R (*) homogen!].

(6) Med $\ln r = t$ får vi $\frac{dR}{dr} = \frac{1}{r}\frac{dR}{dt}$ och

$\frac{d^2R}{dr^2} = \frac{1}{r^2}\left(\frac{d^2R}{dt^2} - \frac{dR}{dt}\right)$ och för $R(t)$ fås diff. ekvationen:

$R'' - \cancel{R'} + \cancel{R'} - n^2R = 0$; som har lösningen $R_n(t) = A_n e^{nt} + B_n e^{-nt}$.

Alltså: $\underline{R_n(r) = A_n r^n + B_n r^{-n}}$.

Med $R(r) = r^\alpha$ fås ur $(*)$: $(DE)_2$; $r^2\alpha(\alpha-1)r^{\alpha-2} + r\alpha r^{\alpha-1} - n^2 r^\alpha = 0$,

alltså $\alpha^2 - \cancel{\alpha} + \cancel{\alpha} - n^2 = 0$; dvs $\alpha = \pm n$ och samma $R_n(r)$.

Att lösningen skall existera för $r = 0$ medför nu $B_n = 0$.

Därmed har vi lösningen för (DE) och $(RV)_\varphi$:

$$u(r,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} R_n(r)\Phi_n(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^n \sin(n\varphi).$$

Den skall också satisfiera $(RV)_r$:

$$u(1,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\varphi) = \sin^3\varphi = \frac{3}{4}\sin\varphi - \frac{1}{4}\sin(3\varphi),$$

dvs, $A_1 = \frac{3}{4}$, $A_2 = 0$, $A_3 = -\frac{1}{4}$, och $A_n = 0$ för $n \geq 4$.

Svar: $u(r,\varphi) = \frac{3}{4} r \sin\varphi - \frac{1}{4} r^3 \sin(3\varphi)$. ☒

Vill man ha svaret i x, y är det lätt att substituera tillbaka i

$r\sin\varphi = y$

$r^3\sin(3\varphi) = r^3\left(3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi\right) = 3r^2(r\sin\varphi) - 4r^3\sin^3\varphi = 3(x^2+y^2)y - 4y^3$

$\Rightarrow u(x,y) = \frac{3}{4}y - \frac{1}{4}\left(3(x^2+y^2)y - 4y^3\right)$

Svar i (x,y): $u(x,y) = \frac{3}{4}y - \frac{3}{4}x^2y + \frac{1}{4}y^3$. ☒

Anm. a. I den nya formen: Svar i (x,y) är det lättare att verifiera u löser problemet.

b. Alternativ! Lös problemet m.h.a. potential teori: konforma avbildningar. /HL