

TMA132 Fourieranalys F2/Kf2, 5 poäng

OBS! Ange namn, personnummer samt linje och inskrivningsår.

1. För ett linjärt tidsinvariant system gäller att insignalen $x_1(t) = \text{sign}(t)e^{-|t|}$ ger upphov till utsignalen $y_1(t) = t \text{sign}(t)e^{-2|t|}$. Vad blir utsignalen $y(t)$, om insignalen $x(t)$ är 2π -periodisk $x(t) = \pi - t$ för $0 < t < 2\pi$? Ange $y(t)$ i form av en komplex trigonometrisk Fourierserie.

2. Bestäm den elektrostatiska potentialen $\varphi(x, y)$ i området $D = \{(x, y) : 0 < y < x\}$ om potentialen på randen är

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} \alpha, & (x, y) \in \partial D, \quad x^2 + y^2 > r^2, \\ \beta, & (x, y) \in \partial D, \quad x^2 + y^2 \leq r^2. \end{cases}$$

3. Beräkna faltningen $(f * f)(x)$, $-\infty < x < \infty$, då

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-\xi} \sin(\xi x) d\xi, \quad -\infty < x < \infty.$$

4. Lös begynnelsevärdesproblemet (c är konstant),

$$\begin{cases} u_t + c^2 u = u_{xx}, & -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = x e^{-x^2}, & -\infty < x < \infty. \end{cases}$$

5. Lös Dirichlets randvärdesproblem $\nabla^2 u(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{r}$, $0 < a < r < b$, med rand data $u(a, \theta) = \cos \theta$, och $u(b, \theta) = 1$. (Obs! sfäriska koordinater).

6. Bestäm den stationära temperaturfördelningen i cylindern $x^2 + y^2 \leq a^2$, $0 \leq z \leq 1$, då den buktiga ytan $x^2 + y^2 = a^2$ och "toppen" $z = 1$ hålls vid temperaturen 0 medan "botten" $z = 0$ ligger på en platta med radiell värmespridning enligt $u(r, 0) = r^2$.

7. Visa att

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) z^n = e^{\frac{x}{2}(z - \frac{1}{z})}, \quad \forall z \neq 0, \quad \forall x.$$

8. Definiera vad som menas med derivatan av en distribution. Visa att om $g \in C^{(\infty)}$ och F är en distribution så gäller att:

$$(gF)' = g'F + gF'.$$

1. Vi har att

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \text{sign}(t)e^{-|t|} \implies \hat{x}_1(t) = \frac{-2i\xi}{1+\xi^2}. \\ y_1(y) &= t \text{sign}(t)e^{-2|t|} \implies \hat{y}_1(t) = i \frac{d}{d\xi} \left(\frac{-2i\xi}{4+\xi^2} \right) = i \frac{-2i(4+\xi^2) - (-2i\xi)(2\xi)}{(4+\xi^2)^2} \\ &= i(-2i) \frac{4+\xi^2-2\xi^2}{(4+\xi^2)^2} = 2 \frac{4-\xi^2}{(4+\xi^2)^2}. \end{aligned}$$

Detta ger överföringsfunktionen

$$\hat{h}(\xi) = \frac{\hat{y}_1(t)}{\hat{x}_1(t)} = 2 \frac{4-\xi^2}{(4+\xi^2)^2} \times \frac{1+\xi^2}{-2i\xi} = \frac{i}{\xi} \cdot \frac{(4-\xi^2)(1+\xi^2)}{(4+\xi^2)^2}.$$

Komplexa Fourierseriutvecklingen av den 2π periodiska $x(t) = \pi - t$ ges av

$$x(t) = \pi - t \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{int},$$

där för $n \neq 0$, är

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\pi - t) e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \left[(\pi - t) \frac{e^{-int}}{-in} \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} (-1) \frac{e^{-int}}{-in} dt \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[-\pi \frac{e^{-in(2\pi)}}{-in} - \frac{\pi}{-in} + \frac{e^{-int}}{(-in)^2} \Big|_0^{2\pi} \right] = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{-\pi}{-in} + \frac{-\pi}{-in} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{2\pi}{in} = \frac{1}{in} = \frac{-i}{n}, \quad n \neq 0. \end{aligned}$$

För $n = 0$, är

$$C_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\pi - t) dt = \frac{1}{2\pi} \frac{(\pi - t)^2}{-2} \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\pi^2}{-2} - \frac{\pi^2}{-2} \right] = 0.$$

Nu

$$e^{i\xi t} \rightsquigarrow \hat{h}(n)e^{i\xi t} \implies e^{int} \rightsquigarrow \hat{h}(\xi)e^{int},$$

värför för $n \neq 0$ gäller att

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{int} = \sum_{n=-\infty(n \neq 0)}^{\infty} \frac{-i}{n} e^{int} \rightsquigarrow \sum_{n=-\infty(n \neq 0)}^{\infty} \frac{-i}{n} \hat{h}(n) e^{int} = y(t).$$

Alltså

$$y(t) = \sum_{n=-\infty(n \neq 0)}^{\infty} \frac{-i}{n} \cdot \frac{-i(4-n^2)(1+n^2)}{(4+n^2)^2} e^{int}.$$

Dvs svaret är

$$y(t) = \sum_{n=-\infty(n \neq 0)}^{\infty} \frac{(n^2-4)(n^2+1)}{n^2(n^2+4)^2} e^{int}.$$

2. Avbildningen $w = z^4$, $z = x + iy$ avbildar D på övre halvplanet. Sätt $w = u + iv$, vi skall nu bestämma en funktion $\Phi(u, v)$, som är harmonisk i halvplanet $v > 0$ och uppfyller randvillkoren

$$\Phi(u, 0) = \begin{cases} \alpha, & u < -r^4, \\ \beta, & -r^4 \leq u \leq r^4, \\ \alpha, & u > r^4. \end{cases}$$

Funktionen

$$\Phi(u, v) = A \arg(w + r^4) + B \arg(w - r^4) + C,$$

är harmonisk i övre halvplanet, $v > 0$, och antar konstanta värden på de tre intervallen $u < -r^4$, $-r^4 \leq u \leq r^4$ och $u > r^4$ på realaxeln. Vi väljer argumenten så att $0 \leq \arg(\cdot) \leq \pi$; vi har $\arg(u + iv) = \operatorname{arccot} \frac{u}{v}$ då $v > 0$. Välj konstanterna A , B och C så att dessa värden blir α , β , respektive α :

$$\begin{aligned} A\pi + B\pi + C &= \alpha, \\ B\pi + C &= \beta, \\ C &= \alpha. \end{aligned}$$

Detta ger $A = \frac{\alpha - \beta}{\pi}$, $B = -\frac{\alpha - \beta}{\pi}$, $C = \alpha$. Med substitutionen $w = z^4$ får vi då en lösning $\varphi(x, y)$ till det givna problemet. Då

$$w = (u + iv) = (x + iy)^4 = (x^2 - y^2 + 2ixy)^2 = (x^2 - y^2)^2 - 4x^2y^2 + 4ixy(x^2 - y^2),$$

blir alltså lösningen

$$\alpha + \frac{\alpha - \beta}{\pi} \left[\operatorname{arccot} \frac{(x^2 - y^2)^2 - 4x^2y^2 + r^4}{4xy(x^2 - y^2)} - \operatorname{arccot} \frac{(x^2 - y^2)^2 - 4x^2y^2 - r^4}{4xy(x^2 - y^2)} \right].$$

3. Vi kan skriva

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^\infty e^{-\xi} \sin(\xi x) d\xi = \int_0^\infty e^{-|\xi|} \sin(\xi x) d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty -\pi i \operatorname{sign}(\xi) e^{-|\xi|} e^{i\xi x} d\xi. \end{aligned}$$

Detta ger att Fouriertransformen av $f(x)$ är

$$\hat{f}(\xi) = (-\pi i) \operatorname{sign}(\xi) e^{-|\xi|}.$$

Då får vi

$$\mathcal{F}[(f * f)(x)](\xi) = [\hat{f}(\xi)]^2 = -\pi^2 e^{-2|\xi|} = -2\pi \frac{\pi}{2} e^{-2|\xi|},$$

som har invers Fouriertransformen

$$(f * f)(x) = \frac{-2\pi}{x^2 + 4}.$$

4. Vi sätter $xe^{-x^2} = f(x)$. Fouriertransformen ix -led, ger

$$\hat{u}_t = -\xi^2 \hat{u} - c^2 \hat{u} = -(\xi^2 + c^2) \hat{u} \implies \hat{u}(\xi, t) = C(\xi) e^{-(\xi^2 + c^2)t},$$

där

$$\hat{u}(\xi, 0) = C(\xi) = \hat{f}(\xi).$$

Vidare är

$$\mathcal{F}[e^{-x^2}] = \sqrt{\pi} e^{-\xi^2/4} \implies \hat{f}(\xi) = i \frac{d}{d\xi} (\sqrt{\pi} e^{-\xi^2/4}) = i\sqrt{\pi} (-\xi/2) e^{-\xi^2/4}.$$

Detta ger att

$$\hat{u}(\xi, t) = -i\sqrt{\pi} (\xi/2) e^{-c^2 t} e^{-(t+1/4)\xi^2}.$$

Med $A = t + \frac{1}{4}$ gäller att

$$e^{-A\xi^2} = \mathcal{F}\left[\frac{1}{\sqrt{4\pi A}} e^{-x^2/4A}\right],$$

som innebär att

$$(i\xi) e^{-A\xi^2} = \mathcal{F}\left[\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi A}} e^{-x^2/4A}\right)\right] = \mathcal{F}\left[\frac{1}{\sqrt{4\pi A}} \frac{-x}{2A} e^{-x^2/4A}\right].$$

Med invers Fouriertransformering får vi

$$u(x, t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-c^2 t} \frac{1}{\sqrt{4\pi(t+1/4)}} \frac{x}{2(t+1/4)} e^{-x^2/4(t+1/4)}$$

vilket, efter förenkling ger

$$u(x, t) = \frac{x}{(4t+1)^{3/2}} e^{-c^2 t} e^{-\frac{x^2}{4t+1}}.$$

5. Eftersom data är φ oberoende så är $u = u(r, \theta)$. Först löser vi θ oberoende problemet för \tilde{u} ur ekvationen:

$$\begin{cases} \nabla^2 \tilde{u}(r) = \frac{1}{r}, & 0 < a < r < b \\ \tilde{u}(a) = \tilde{u}(b) = 0. \end{cases}$$

Vi får

$$\begin{aligned} \nabla^2 \tilde{u}(r) = 1/r &\iff \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \tilde{u}') = \frac{1}{r}, \quad \frac{d}{dr} (r^2 \tilde{u}') = r, \quad r^2 \tilde{u}' = \frac{r^2}{2} + C, \\ &\implies \tilde{u}' = \frac{1}{2} + \frac{C}{r^2}, \implies \tilde{u}(r) = \frac{r}{2} - \frac{C}{r} + D. \end{aligned}$$

Randvillkoren ger ekvationerna

$$\tilde{u}(a) = 0 \implies \frac{a}{2} - \frac{C}{a} + D = 0, \quad \tilde{u}(b) = 0 \implies \frac{b}{2} - \frac{C}{b} + D = 0.$$

v.g.v.

Genom att lösa dessa ekvationer får vi $D = -(a+b)/2$, $C = -ab/2$.
Alltså vi har

$$\tilde{u}(r) = \frac{1}{2} \left[r + \frac{ab}{r} - (a+b) \right] = \frac{1}{2r} \left[r^2 - (a+b)r + ab \right] = \frac{1}{2r} (r-a)(r-b).$$

Sätt $v = u - \tilde{u}$. Då blir ekvationen för v homogen med inhomogena randvillkor:

$$\begin{cases} \nabla^2 v(r, \theta) = 0, & 0 < a < r < b \\ v(a, \theta) = \cos(\theta), & v(b, \theta) = 1. \end{cases}$$

Lösningen för v kan ansättas som

$$v(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{-n-1}) P_n(\cos \theta),$$

Där P_n är Legendre polynom av ordning n . Vi har att

$$\begin{cases} v(a, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n a^n + B_n a^{-n-1}) P_n(\cos \theta) = \cos(\theta) = P_1(\cos \theta) \\ v(b, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n b^n + B_n b^{-n-1}) P_n(\cos \theta) = 1 = P_0(\cos \theta). \end{cases}$$

Identifiering av koefficienter ger

$$n=0: \begin{cases} A_0 + B_0/a = 0, & A_0 = -B_0/a, \\ A_0 + B_0/b = 1, & -B_0/a + B_0/b = 1. \end{cases} \quad B_0 \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) = 1$$

Vi får att

$$B_0 = -\frac{ab}{b-a}, \quad A_0 = \frac{b}{b-a}$$

P.s.s.

$$n=1: \begin{cases} A_1 a + B_1/a^2 = 1, & -aB_1/b^3 + B_1/a^2 = 1, & B_1 \left(\frac{1}{a^2} - \frac{a}{b^3} \right) = 1, \\ A_1 b + B_1/b^2 = 0, & A_1 = -B_1/b^3. \end{cases}$$

Vi får att

$$B_1 = \frac{a^2 b^3}{b^3 - a^3}, \quad A_1 = -\frac{a^2}{b^3 - a^3}.$$

För högre ordnings koefficienter gäller

$$A_n = B_n = 0, \quad \text{för alla } n \geq 2.$$

Härigenom får vi

$$v(r, \theta) = \left(\frac{b}{b-a} - \frac{ab}{b-a} \frac{1}{r} \right) + \left(\frac{-a^2}{b^3 - a^3} r + \frac{a^2 b^3}{b^3 - a^3} \frac{1}{r^2} \right) \cos(\theta).$$

Slutligen $u = \tilde{u} + v$ ger svaret:

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2r} (r-a)(r-b) + \frac{b}{(b-a)r} (r-a) - \frac{a^2}{(b^3 - a^3)r^2} (r^3 - b^3) \cos(\theta).$$

6. Data oberoende av $\theta \implies u = u(r, z)$ satisfierar

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, & 0 < r < a, & 0 < z < 1, \\ u(r, z), \text{ begränsad då } r \rightarrow 0, & u(a, z) = 0, \\ u(r, 0) = r^2, & u(r, 1) = 0. \end{cases}$$

Variabelseparation: $u(r, z) = R(r)Z(z) \neq 0$, ger

$$\frac{1}{r}(rR')'Z + RZ'' = 0 \implies -\frac{\frac{1}{r}(rR')'}{R} = \frac{Z''}{Z} = \lambda.$$

Vi får separerade differentialekvationer för R och Z :

$$(I) \quad -\frac{1}{r}(rR')' = \lambda R, \quad R(r) \text{ begränsad då } r \rightarrow 0, \quad R(a) = 0,$$

$$(II) \quad Z'' = \lambda Z, \quad Z(1) = 0.$$

(I) är sigulärt Sturm-Liouville problem med $w(r) = r$. Vi har $\lambda > 0$. Sätt $\lambda = \beta^2$, $\beta > 0$. Ekvationen $\frac{1}{r}(rR')' + \beta^2 R = 0$, är en Bessel differetial ekvation av ordning 0, och har allmän lösning:

$$R(r) = C_1 J_0(\beta r) + C_2 Y_0(\beta r). \quad R(r) \text{ begränsad då } r \rightarrow 0 \implies C_2 = 0,$$

$$R(a) = 0 \implies C_1 J_0(\beta a) = 0, \quad C_1 \neq 0 \text{ tag } C_1 = 1, \text{ värför } J_0(\beta a) = 0.$$

Sätt $\beta a = \alpha_{0n}$, där α_{0n} , $n = 1, 2, \dots$, är de positiva nollställerna till ekvationen $J_0(x) = 0$. Då har vi egenvärdena och egenfunktioner enligt:

$$\beta = \beta_n = \frac{\alpha_{0n}}{a}, \quad \lambda_n = \beta_n^2 = \left(\frac{\alpha_{0n}}{a} \right)^2, \quad R_n(r) = J_0(\beta_n r), \quad n \geq 1.$$

(II) blir då $Z_n'' = \beta_n^2 Z_n$, som ger

$$Z_n(z) = A_n \sinh \beta_n(1 - z) + B_n \cosh \beta_n(1 - z)$$

Med $Z_n(1) = B_n = 0$ får vi

$$Z_n(z) = A_n \sinh \beta_n(1 - z).$$

Superposition ger

$$u(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} R_n(r) Z_n(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\beta_n r) \sinh \beta_n(1 - z),$$

med

$$u(r, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh \beta_n J_0(\beta_n r) = r^2.$$

v.g.v.

Eftersom $\{J_0(\beta_n r)\}_{n=1}^{\infty}$ är ett fullständigt ortogonalsystem på $(0, a)$ med $w(r) = r$. Fourierkoefficienter till r^2 är:

$$A_n \sinh \beta_n = \frac{1}{\rho_n} \int_0^a r^2 J_0(\beta_n r) r dr := \frac{1}{\rho_n} I_a.$$

Nedan räknar vi I_a :

$$\begin{aligned} I_a &= \int_0^a r^3 J_0(\beta_n r) dr = \int_0^a r^3 R_n(r) dr = -\frac{1}{\lambda_n} \int_0^a r^2 \frac{d}{dr} (r R_n'(r)) dr \\ &= -\frac{1}{\lambda_n} \left[r^3 R_n'(r) \Big|_0^a - \int_0^a 2r \cdot r R_n'(r) dr \right] \\ &= -\frac{1}{\lambda_n} \left[a^3 R_n'(a) - \left(2r^2 R_n(r) \right) \Big|_0^a + 4 \int_0^a r R_n(r) dr \right] \\ &= \{R_n(a) = 0\} = -\frac{1}{\lambda_n} \left[a^3 R_n'(a) + 4 \int_0^a J_0(\beta_n r) r dr \right] = \{\beta_n r = x\} \\ &= -\frac{1}{\lambda_n} \left[a^3 R_n'(a) + \frac{4}{\beta_n^2} \int_0^{\beta_n a} J_0(x) x dx \right] = -\frac{1}{\lambda_n} \left[a^3 R_n'(a) + \frac{4}{\beta_n^2} (x J_1(x)) \Big|_0^{\beta_n a} \right] \\ &= -\frac{1}{\beta_n^2} \left[a^3 R_n'(a) + \frac{4a}{\beta_n} J_1(\beta_n a) \right] = -\frac{1}{\beta_n^2} \left[a^3 \beta_n J_0'(\beta_n a) + \frac{4a}{\beta_n} J_1(\beta_n a) \right] \\ &= \{J_0'(\beta_n a) = -J_1(\beta_n a)\} = -\frac{1}{\beta_n^2} \left[-a^3 \beta_n + \frac{4a}{\beta_n} \right] J_1(\beta_n a) \\ &= \left(\frac{a^2 \beta_n - 4}{\beta_n^3} \right) a J_1(\beta_n a). \end{aligned}$$

Vidare, enligt Theorem 5.3, är $\rho_n = \frac{a^2}{2} J_1^2(\beta_n a)$. Eller se nedan:

$$\begin{aligned} \rho_n &= \int_0^a J_0^2(\beta_n r) r dr = [x = \beta_n r] = \frac{1}{\beta_n^2} \int_0^{\beta_n a} J_0^2(x) x dx \\ &= \frac{1}{\beta_n^2} \left[\frac{x^2}{2} (J_0^2(x) + J_1^2(x)) \right]_0^{\beta_n a} = \frac{1}{\beta_n^2} \frac{\beta_n^2 a^2}{2} J_1^2(\beta_n a) = \frac{a^2}{2} J_1^2(\beta_n a). \end{aligned}$$

Värför

$$A_n \sinh(\beta_n) = \frac{1}{\frac{a^2}{2} J_1^2(\beta_n a)} \cdot \left(\frac{a^2 \beta_n - 4}{\beta_n^3} \right) a J_1(\beta_n a) = \frac{2(a^2 \beta_n - 4)}{a \beta_n^3 J_1(\beta_n a)}.$$

Och svaret är

$$u(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(a^2 \beta_n - 4)}{a \beta_n^3} \cdot \frac{J_0(\beta_n r)}{J_1(\beta_n a)} \cdot \frac{\sinh \beta_n (1 - z)}{\sinh \beta_n}, \quad \beta_n = \frac{\alpha_{0n}}{a}.$$