Hjälpmedel: Beta, Standard math. tabels, typgodkänd räknedosa

MATEMATIK Telefon: Axel Målqvist, 0740–459022

Chalmers tekniska högskola 2002–08–29 kl. 14.15-19.15

TMA132 Fourieranalys F2/Kf2, 5 poäng

OBS! Ange namn, personnummer samt linje och inskrivningsår.

---

1. Beräkna Fouriertransformen till funktionen $f(t) = \begin{cases} 1-t^2, & |t| \le 1, \\ 0, & |t| > 1. \end{cases}$

   Använd resultatet för att beräkna $\int_0^\infty \frac{\sin x - x\cos x}{x^2}\,dx$.

2. Ett linjärt tidsinvariant kausalt system, (obs! för impulssvaret $h(t)$ antag $h'(0) = h(0) = 0$), har tillståndsekvationen: $y''(t) + y(t) = x(t)$.

   Insignalen är periodisk med perioden 1, och $x(t) = e^{-t}$, då $0 < t < 1$. Bestäm utsignalen $y(t)$ i form av en komplex trigonometrisk Fourierserie.

3. Betrakta Sturm-Liouville-problemet

   $$u''(x) + \lambda u(x) = 0, \qquad u'(0) = u(0), \quad u(1) = 0,$$

   i intervallet $[0,1]$. Hur många egenvärden till detta problem finns i intervallet $-16 < \lambda < 16$?

4. Lös problemet

   $$\begin{cases} u_{xx} - u_{tt} - 3u_t = 0, & 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = 3\sin x - \sin 2x, & u_t(x,0) = 0. \end{cases}$$

5. Lös differentialekvationen

   $$\begin{cases} u_{xx} - x^2 u = u_t, & -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x,0) = e^{-i\alpha x}, & \text{där } \alpha \text{ är en reell konstant.} \end{cases}$$

   Ledning: Ansätt lösningen i form av en Fourier-Hermiteserie, $u(x,t) = \sum_{n=0}^\infty T_n(t)h_n(x)$.

6. Undersök hur avbildningen $w = \frac{i(1-z)}{1+z}$ avbildar enhetscirkeln $|z| = 1$ respektive cikelskivan $|z| < 1$. Använd resultatet för att bestämma den elektrostatiska potentialn $\varphi(x,y)$, $(z = x+iy)$ i enhetscirkelskivan $|z| < 1$ med randvärdena

   $$\varphi(x,y) = \begin{cases} P, & \text{om } |z| = 1, \quad x > 0,\ y > 0, \\ 0, & \text{om } |z| = 1, \quad x < 0, \text{ eller } y < 0. \end{cases}$$

7. Härled differentialekvationen för Legendrepolynomen; dvs visa att

   $$\Big[(1-x^2)P_n'(x)\Big]' + n(n+1)P_n(x) = 0.$$

8. Visa Fouriers inversionssats under förutsättning att f och $\hat{f}$ tillhör L^1.

MA

Lösningar Fourieranalys F2/Kf2, SP 2002-08-29

1) $f(t) = \begin{cases} 1-t^2, & |t| \le 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-1}^{1} (1-t^2) e^{-i\omega t} dt = 2\int_0^1 (1-t^2)\cos(\omega t)\, dt$$

$$= 2\left[(1-t^2)\frac{\sin(\omega t)}{\omega}\right]_0^1 - 2\int_0^1 (-2t)\frac{\sin(\omega t)}{\omega} dt = 4\left[t\,\frac{-\cos\omega t}{\omega^2}\right]_0^1 +$$

$$+4\int_0^1 1\cdot\frac{\cos\omega t}{\omega^2} dt = -\frac{4\cos\omega}{\omega^2} + 4\left[\frac{\sin\omega t}{\omega^3}\right]_0^1 = 4\left(\frac{\sin\omega}{\omega^3} - \frac{\cos\omega}{\omega^2}\right)$$

$$= 4\,\frac{\sin\omega - \omega\cos\omega}{\omega^3}.$$

$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$. Spec för $t = 0$

$f(0) = 1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 4\cdot\frac{\sin\omega - \omega\cos\omega}{\omega^3} d\omega$; $\int_0^{\infty} \frac{\sin\omega - \omega\cos\omega}{\omega^3} = \frac{\pi}{4}$.

---

2) Impulssvar $h(t)$: $h''(t) + h(t) = \delta(t) \Rightarrow \{\mathcal{L}\text{-transf.}\} \Rightarrow$

$s^2 H(s) - s\cancel{h(0)} - \cancel{h'(0)} + H(s) = 1 \Rightarrow H(s) = \frac{1}{s^2+1}$.

Utv. $x(t)$ i komplex Fourierserie! $T = 1$, $\Omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi$

$x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in\Omega t} = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in(2\pi)t}$ där $c_n = \frac{1}{T}\int_0^T x(t) e^{-in\Omega t} dt$;

$$\Rightarrow c_n = \int_0^1 e^{-t} e^{-in(2\pi)t} dt = \left[\frac{e^{-(1+2in\pi)t}}{-(1+2in\pi)}\right]_0^1 = \frac{1-e^{-1}}{1+2in\pi}$$

$\forall\, \omega \in \mathbb{R}$ gäller $e^{i\omega t} \curvearrowright \hat{h}(\omega) e^{i\omega t} \Rightarrow \{\omega = n\Omega = n(2\pi)\}$.

$$\Rightarrow e^{i(2\pi n)t} \curvearrowright \hat{h}(2\pi n) e^{i(2\pi n)t} = \hat{H}(i2\pi n) e^{i(2\pi n)t} = \frac{e^{i(2\pi n)t}}{1-4\pi^2 n^2}$$

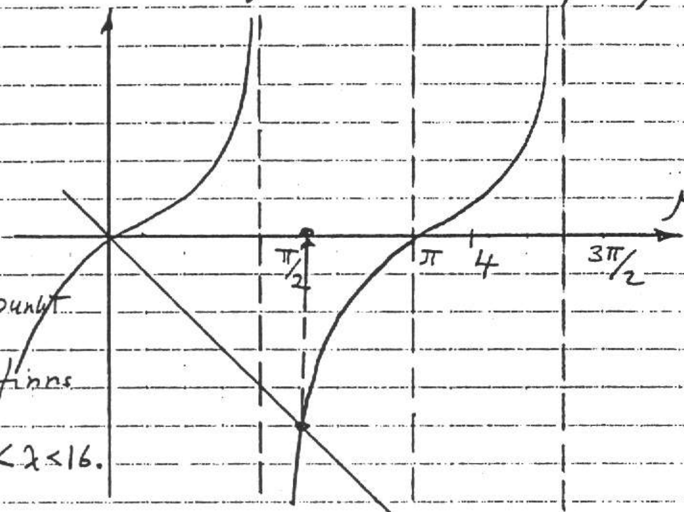
$$y(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1-e^{-1}}{1+2in\pi}\cdot\frac{1}{1-4\pi^2 n^2} e^{i2n\pi t}.$$

3) Sök positiva egenvärden $\lambda = \mu^2$, där $\mu > 0$.

$u'' + \mu^2 u = 0$ ger $u = A\cos\mu x + B\sin\mu x$

Randvärdena: $u'(0) = u(0)$ ger $B\mu = A$, så att $u = B(\mu\cos\mu x + \sin\mu x)$

och $u(1) = 0$ ger $B = 0$ eller $\mu\cos\mu + \sin\mu = 0$, dvs. $\tan\mu = -\mu$.



$0 < \lambda < 16$ ger $0 < \mu < 4$.
Av diagrammet framgår att kurvorna för $\tan\mu$ och $-\mu$ bara har en skärningspunkt där $0 < \mu < 4$. Alltså finns precis ett egenvärde med $0 < \lambda < 16$.

Sök negativa egenvärden, $\lambda = -\nu^2$, $\nu > 0$.

$u'' - \nu^2 u = 0$ ger $u = A\cosh\nu x + B\sinh\nu x$

Randvärdena: $u'(0) = u(0)$ ger $B\nu = A$; $u = B(\nu\cosh\nu x + \sinh\nu x)$

och $u(1) = 0$ ger $B = 0$ eller $\nu\cosh\nu x + \sinh\nu x = 0$;

en ekvation som saknar lösning för $\nu > 0$. Inga negativa egenvärden.

Är $\lambda = 0$ ett egenvärde?

$u'' = 0$ ger $u = Ax + B$

Randvärdena: $u'(0) = u(0)$ ger $A = B$, $u(x) = A(x+1)$

$u(1) = 0$ ger $A = 0$ och $u \equiv 0$.

$\lambda = 0$ är inget egenvärde.

Totalt finns därför ett egenvärde: $-16 < \lambda < 16$.

4) $$\begin{cases} u_{xx} - u_{tt} - 3u_t = 0, & 0<x<\pi,\ t>0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = 3\sin x - \sin 2x, & u_t(x,0) = 0. \end{cases}$$

Variabelseparation: $u(x,t) = X(x)T(t) \neq 0$ ger $X''T = XT'' + 3XT'$

$\frac{X''}{X} = \frac{T''+3T'}{T} = \lambda$. I. $\begin{cases} X'' = \lambda X \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases}$ II. $\begin{cases} T''+3T' = \lambda T \\ T'(0) = 0 \end{cases}$

I. ger $\lambda = \lambda_n = -n^2$, $X_n(x) = \sin nx$, $n = 1, 2, \ldots$

II. ger $T''+3T'+n^2T = 0$ med karakt. ekv. $r^2+3r+n^2 = 0$

$r = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - n^2}$. Olika typ beroende om $\frac{9}{4} - n^2$ är <0 eller >0. Låt $T_n(t)$ vara den lösning som också uppfyller $T_n(0) = 1$ konstant

Ansatt $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n X_n(x) T_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin nx \, T_n(t)$

$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin nx = 3\sin x - \sin 2x$

$\therefore$ $C_1 = 3$, $C_2 = -1$, övriga $C_n = 0$.

$u(x,t) = 3\sin x \cdot T_1(t) - \sin 2x \cdot T_2(t)$

n=1 ger $r = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 1} = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$; $T_1(t) = c_1 e^{\frac{-3+\sqrt{5}}{2}t} + c_2 e^{-\frac{3-\sqrt{5}}{2}t}$

$T_1(0) = 1$, $T_1'(0) = 0$ ger $\begin{cases} c_1 + c_2 = 1, \\ -c_1 \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{2} - c_2 \frac{3-\sqrt{5}}{2} = 0. \end{cases}$

$c_1 = -\frac{3-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$, $c_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$; $T_1(t) = \frac{1}{2\sqrt{5}}\left[(3+\sqrt{5}) e^{-\frac{3-\sqrt{5}}{2}t} - (3-\sqrt{5}) e^{-\frac{3+\sqrt{5}}{2}t}\right]$

n=2 ger $r = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 4} = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2} i$; $T_2(t) = e^{-\frac{3t}{2}}\left(d_1 \cos\frac{\sqrt{7}}{2}t + d_2 \sin\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)$

$T_2(0) = 1$, $T_2'(0) = 0$ ger $d_1 = 1$, $d_2 \frac{\sqrt{7}}{2} - \frac{3}{2} d_1 = 0$, $d_2 = \frac{3}{\sqrt{7}}$

$\therefore$ $T_2(t) = e^{-\frac{3t}{2}}\left(\cos\frac{\sqrt{7}}{2}t + \frac{3}{\sqrt{7}} \sin\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)$

$$u(x,t) = \frac{3}{2\sqrt{5}}\left[(3+\sqrt{5}) e^{-\frac{3-\sqrt{5}}{2}t} - (3-\sqrt{5}) e^{-\frac{3+\sqrt{5}}{2}t}\right] \sin x - e^{-\frac{3t}{2}}\left(\cos\frac{\sqrt{7}}{2}t + \frac{3}{\sqrt{7}} \sin\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) \sin 2x .$$

5) $$\begin{cases} u_{xx} - x^2 u = u_t, & -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \qquad (DE) \\ u(x,0) = e^{-i\alpha x}, & \alpha \in \mathbb{R} \text{ konstant} \end{cases}$$

$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t)\, h_n(x)$ uppfyller i (DE) om

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n(t)\left[h_n''(x) - x^2 h_n(x) \right] = \sum_{n=0}^{\infty} T_n'(t)\, h_n(x).$$

Men $h_n''(x) - x^2 h_n(x) = -(2n+1)\, h_n(x)$ så att

$$\sum_{n=0}^{\infty} -(2n+1)\, T_n(t)\, h_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n'(t)\, h_n(t) \Rightarrow T_n'(t) = -(2n+1)\, T_n(t),$$

$T_n(t) = C_n e^{-(2n+1)t}$, Alltså är $u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-(2n+1)t} h_n(x)$

$u(x,0) = e^{-i\alpha x} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n h_n(x)$ är Fourier-Hermiteserie med

$$C_n = \frac{1}{H_n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x} h_n(x)\, dx = \frac{1}{n!\, 2^n \sqrt{\pi}}\, \hat{h}_n(\alpha) = \left\{ \hat{h}_n(\xi) = i^{-n} \sqrt{2\pi}\, h_n(\xi) \right\}$$

$$= \frac{1}{n!\, 2^n \sqrt{\pi}}\, i^{-n} \sqrt{2\pi}\, h_n(\alpha) = \frac{1}{n!}\, 2^{\frac{1}{2}-n}\, i^{-n} h_n(\alpha) = \frac{(-1)^n}{n!}\, 2^{\frac{1}{2}-n}\, i^n\, h_n(\alpha).$$

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\, 2^{\frac{1}{2}-n}\, i^n\, e^{-(2n+1)t}\, h_n(\alpha)\, h_n(x).$$

---

6) Avbildningen $w = \frac{i(1-z)}{1+z}$ avbildar realaxeln på imaginäraxeln. punkterna 1 och -1 går på 0 resp. ∞. Cirkeln $|z| = 1$ går på en rät linje, som skär imaginäraxeln vinkelrätt i $w = 0$ (konf. avb): $|z| = 1 \xrightarrow{\text{avb.}}$ realaxeln i w-planet

Slutligen eftersom $z = 0$ går på $w = i$, så $|z| < 1 \to$ halvplanet $\operatorname{Im} w > 0$

Då z går från 1 till i längs cirkeln $|z| = 1$ i positiv led går w från 0 till 1 längs realaxeln med växande u (obs! orienteringen bevaras). Vi skall nu bestämma en funktion $\Phi(u,v)$ som är harmonisk i halvp. $\operatorname{Im} w > 0$, och uppfyller randvillkoren $\Phi(u,0) = \begin{cases} P, & 0 < u < 1 \\ 0 & u < 0 \text{ och } u > 1. \end{cases}$

Funktionen $\Phi(u,v) = C_1 \arg w + C_2 \arg(w-1) + C_3$ är harmonisk för $v > 0$, och antar konstanta värden på de tre intervallen: $u < 0$, $0 < u < 1$ och $u > 1$.

Vi väljer $0 \le \arg(\cdot) \le \pi$, vi har $\arg(u+iv) = \operatorname{arccot} \frac{u}{v}$, då $v > 0$.

Välj C_1, C_2 och C_3 så att de konstanta värdena blir 0, P, resp. 0:

$$\begin{cases} C_1 \pi + C_2 \pi + C_3 = 0 \\ C_2 \pi + C_3 = P \\ C_3 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} C_1 = -\frac{P}{\pi} \\ C_2 = \frac{P}{\pi} \\ C_3 = 0 \end{cases}$$

6) fortsf.

Då gäller $\Phi(u,v) = \frac{P}{\pi}\left(\arg(w-1) - \arg w\right) = \frac{P}{\pi}\arg\frac{w-1}{w}$.

Med substitutionen $w = \frac{i(1-z)}{1+z}$ får vi då en lösning $\varphi(x,y)$ till det givna problemet. Då

$$\frac{w-1}{w} = \frac{1-z+i(1+z)}{1-z} = \frac{1-x-iy+i(1+x+iy)}{1-x-iy} = \frac{1-x-y+i(1+x-y)}{1-x-iy}$$

$$= \frac{\left[1-x-y+i(1+x-y)\right](1-x+iy)}{(1-x)^2+y^2} = \frac{(1-x)^2+y^2-2y+i(1-x^2-y^2)}{(1-x)^2+y^2},$$

blir alltså lösningen

$$\varphi(x,y) = \frac{P}{\pi}\operatorname{arccot}\frac{(1-x)^2+(1-y)^2-1}{1-x^2-y^2}.$$

ULA