Hjälpmedel: Beta, Standard math. tabels, typgodkänd räknedosa
MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola
Telefon: Georgios Foufas, 0740-459022
2003-01-18 kl. 8.45-13.45

TMA132 Fourieranalys F2/Kf2, 5 poäng

OBS! Ange namn, personnummer samt linje och inskrivningsår.

1. Bestäm det polynom $P(x)$ av högst andra graden som minimerar
$$\int_{-1}^{1}[\sqrt{1-x^2}-P(x)]^2\,dx.$$

2. Bestäm en lösning till ekvationen
$$\begin{cases} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, & -\infty<x<\infty, \quad t>0. \\ u(x,0)=e^{-|x|}, & \lim_{t\to\infty} u(x,t)=0. \end{cases}$$

3. Betrakta differentialekvationen
$$u_{xx}=u_t, \qquad -\infty<x<\infty, \quad t\geq 0.$$
Visa att om $u(x,t)$ är periodisk som funktion av x med perioden 2π, så
$$\int_{-\pi}^{\pi} u(x,0)\,dx=0 \Longrightarrow \int_{-\pi}^{\pi}|u(x,t)|^2\,dx \leq e^{-2t}\int_{-\pi}^{\pi}|u(x,0)|^2\,dx, \qquad t\geq 0.$$

4. Antag $0<a<L$ och $c>0$. Lös ekvationen
$$\begin{cases} u_{xx}=\frac{1}{c^2}u_{tt}, & t>0, & 0<x<L, \\ u(0,t)=u(L,t)=0, & t>0, & \\ u(x,0)=0, & u_t(x,0)=\delta(x-a), & 0<x<L. \end{cases}$$

5. Bestäm samtliga egenvärden och egenfunktioner till problemet
$$\begin{cases} -\frac{1}{r}(rR')'=\lambda R, & 0<r<a, \\ R(r) \text{ begränsad då } r\to 0, & R'(a)=0. \end{cases}$$
Utveckla funktionen r^2 i Fourierserie m.a.p. egenfunktionerna.
Ledning: Man kan få användning av följande formler:
$$\int J_0^2(x)\,x\,dx=\frac{x^2}{2}\Big[J_0^2(x)+J_1^2(x)\Big], \quad \frac{d}{dx}\Big(x^p J_p(x)\Big)=x^p J_{p-1}(x).$$

6. Undersök hur avbildningen $w=\frac{z}{z-2i}$ avbildar området $\Omega=\{z: |z-i|<1,\ Re z>0\}$. Använd resultatet för att bestämma en funktion $\varphi(x,y)$, $(z=x+iy)$ som är harmonisk i Ω och har randvärdena
$$\varphi(x,y)=\begin{cases} P, & \text{om } |z-i|=1, & x>0, \\ 0, & \text{om } x=0, & 0<y<2. \end{cases}$$

7. Formulera och bevisa samplingsteoremet då $f\in L^2$.

8. Visa att $J_\nu(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$ satisfierar Bessels differentialekvation
$$x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0.$$

MA

Lösningar Fourieranalys F2/Kf2, 5p (TMA132), 18/01-2003

1) Ansätt $P(x) = \sum_{k=0}^{2} c_k P_k(x)$, där $P_k(x)$ är Legendre polynom av grad k.

Då blir integralen minimal om och endast om

$c_k = (k+\frac{1}{2})\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, P_k(x)\,dx$, $k=0,1,2$; $P_0(x)=1$, $P_1(x)=1$ och $P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$:

Detta ger

$$c_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\cdot 1\,dx = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \{x=\sin t\} = \int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt = \int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2t\right)dt = \frac{\pi}{4}.$$

$$c_1 = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,x\,dx = \{\text{udda}\} = 0.$$

$$c_2 = \frac{5}{2}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{1}{2}(3x^2-1)\,dx = \frac{15}{4}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,x^2\,dx - \frac{5}{2}c_0 = \frac{15}{2}\underbrace{\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,x^2\,dx}_{:=J} - \frac{5c_0}{2}$$

$$J = \{x=\sin t\} = \int_0^{\pi/2}\cos t\cdot\sin^2 t\cdot\cos t\,dt = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}(\sin 2t)^2\,dt$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}(1-\cos 4t)\,dt = \frac{\pi}{16} \Rightarrow c_2 = \frac{15}{2}\cdot\frac{\pi}{16} - 5\cdot\frac{\pi}{8} = -\frac{5\pi}{32}.$$

Svar: $\underline{\underline{P_2(x)}} = -\frac{5\pi}{32}\cdot\frac{1}{2}(3x^2-1)+\frac{\pi}{4} = -\frac{15\pi}{64}x^2 + \frac{21\pi}{64} = \underline{\underline{\frac{3\pi}{64}(-5x^2+7)}}$

---

2)
$$\begin{cases} \text{(DE)}: & \dfrac{\partial^4 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad -\infty<x<\infty, \quad t>0 \\ \text{(RV1)}: & u(x,0) = e^{-|x|} \\ \text{"RV2"}: & \lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0 \end{cases}$$

F-transf. i x-led ger $\underline{\underline{(DE)^\wedge}}: (i\xi)^4\hat{u}(\xi,t) = \hat{u}_{tt}(\xi,t)$ dvs $\underline{\underline{\hat{u}_{tt} - \xi^4\hat{u} = 0}}$.

$(DE)^\wedge$s lösningar: $\hat{u}(\xi,t) = A(\xi)e^{\xi^2 t} + B(\xi)e^{-\xi^2 t}$

("RV2"): $\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0 \Rightarrow \lim_{t\to\infty}\hat{u}(\xi,t) = \lim_{t\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)e^{-i\xi x}\,dx = 0 \Rightarrow$

$A(\xi)=0$ dvs $\underline{\underline{\hat{u}(\xi,t) = B(\xi)e^{-\xi^2 t}}}$.

$t=0$ ger $u(x,0) = f(x) \overset{F}{\supset} \hat{f}(\xi) = \hat{u}(\xi,0) = B(\xi)$.

$f(x) = e^{-|x|} \Rightarrow \hat{f}(\xi) = \frac{2}{1+\xi^2}$ dvs $B(\xi) = \frac{2}{1+\xi^2}$.

Alltså $\hat{u}(\xi,t) = \frac{2}{1+\xi^2}e^{-\xi^2 t}$. Nu gäller det att $e^{-ax^2/2} \overset{F}{\supset} \sqrt{\frac{2\pi}{a}}\,e^{-\xi^2/2a}$

med $\frac{1}{2a} = t$ fås $a = \frac{1}{2t}$ och $e^{-x^2/4t} \overset{F}{\supset} \sqrt{4\pi t}\,e^{-\xi^2 t} \Leftrightarrow \frac{e^{-x^2/4t}}{\sqrt{4\pi t}} \overset{F}{\supset} e^{-\xi^2 t}$.

och $u(x,t) = e^{-|x|} * \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-x^2/4t}$

Svar: $u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\sigma-x|}\, e^{-\sigma^2/4t}\,d\sigma$.

3) Sätt $u(x,t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{\underline{u_n(t)}}\, e^{jn\Omega x} = \left\{\Omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1\right\} \overset{*}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n(t)\, e^{jnx}$

$u_{xx}=u_t$ med termvis derivering $\Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} -n^2 u_n(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n'(t)$

dvs $-n^2 u_n(t) = u_n'(t)$, $n=0,\pm1,\dots$. Alltså $\underline{\underline{u_n(t) = C_n e^{-n^2 t}}}$, $u_n(0)=C_n$

$$u(x,0) \overset{*}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n(0)\, e^{jnx} = \sum_{n=-n}^{n} C_n e^{jnx} \Rightarrow C_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(x,0)\, e^{-jnx}\,dx,$$

OBS! $C_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(x,0)\,dx = 0$. Parsevals $\Rightarrow$

$$\underline{\underline{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|u(x,t)|^2\,dt}} = \sum_{-\infty}^{\infty}|u_n(t)|^2 = \sum_{-\infty}^{\infty}|C_n|^2 e^{-2n^2 t} \le \{C_0=0\}$$

$$\le e^{-2t}\sum_{\substack{-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}|C_n|^2 \le \underline{\underline{\frac{1}{2\pi}e^{-2t}\int_{-\pi}^{\pi}|u(x,0)|^2\,dx}}, \boxtimes$$

4)
$$\begin{array}{ll} \text{(DE)} \\ \text{(RV)} \\ \text{(BV)} \end{array} \begin{cases} u_{xx} = \frac{1}{c^2}u_{tt} & t>0, \quad 0<x<L \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & t>0, \\ u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = \delta(x-a), & 0<x<L. \end{cases}$$

Sätt $u(x,t) = X(x)T(t) \neq 0$. (DE) $\Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{c^2T(t)} = \lambda < 0$

(X) $\begin{cases} X'' = \lambda X \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases} \Rightarrow X(x) = A\sin\sqrt{-\lambda}\,x$ med $\begin{cases} \underline{\underline{\lambda_n = -\left[\frac{n\pi}{L}\right]^2}} \ \& \ \underline{\underline{X_n(x) = \sin\frac{n\pi}{L}x}}, \\ n=1,2,\dots \text{ (egenpar)} \end{cases}$

$\frac{T''(t)}{c^2T(t)} = \lambda$ & $u(x,0) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{T_n(t) = A_n \sin\frac{cn\pi}{L}t}}$, $n=1,2,\dots$

Alltså $u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = A_n\sin\frac{n\pi x}{L}\sin c\frac{n\pi}{L}t \Rightarrow$ {Superposition}

$\underline{\underline{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi}{L}x \sin c\frac{n\pi}{L}t}}$. Återstår att bestämma A_n:

$\delta(x-a) = u_t'(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{cn\pi}{L}\sin\frac{n\pi}{L}x$. Multip. med $\sin\frac{k\pi}{L}x$ & $\int_0^L$

fås: $\underbrace{\int_0^L \overbrace{\sin\frac{k\pi x}{L}\delta(x-a)}^{=\sin\frac{k\pi a}{L}\delta(x-a)}\,dx}_{=\sin\frac{k\pi a}{L}} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\frac{cn\pi}{L}\underbrace{\int_0^L \sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{k\pi x}{L}\,dx}_{=0 \text{ om } n\neq k,\ \frac{L}{2} \text{ om } n=k} = A_k\frac{ck\pi}{L}\frac{L}{2}$

Alltså $\sin\frac{k\pi a}{L} = A_k\frac{ck\pi}{2} \Rightarrow \underline{\underline{A_k = \frac{2}{cn\pi}\sin\frac{n\pi a}{L}}}$

Svar: $\underline{\underline{u(x,t) = \frac{1}{c\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi a}{L}\left[\cos\frac{n\pi}{L}(x-ct) - \cos\frac{n\pi}{L}(x+ct)\right]}}. \boxtimes$

5) $$\begin{cases} \frac{1}{r}(rR')' = \lambda R, & 0 < r \\ R(r) \text{ begränsad då } r \to 0 \\ R'(a) = 0 \end{cases}$$

Singulärt S-L problem; $\lambda \geq 0$.

$\underline{\lambda = 0}$ ger $(rR')' = 0$, $rR' = C$, $R' = \frac{C}{r}$, $\underline{R(r) = C_1 \ln r + C_2}$.

Randvillkoren ger egenfunktionen $\underline{R_0(r) = 1}$ till egenvärdet $\underline{\lambda_0 = 0}$.

$\underline{\lambda > 0}$. Sätt $\lambda = \beta^2$, $\beta > 0$. Då fås ekv. $R'' + \frac{1}{r}R' + \beta^2 R = 0$ som är Bessels diff. ekv. av ordning 0 med allm. lösning

$R(r) = C_1 J_0(\beta r) + C_2 Y_0(\beta r)$.

$R(r)$ begr. då $r \to 0 \Rightarrow C_2 = 0$.

$R'(a) = C_1 \beta J_0'(\beta a) = 0 \Rightarrow J_0'(\beta a) = 0$.

Låt α_n, $n \geq 1$, vara de positiva nollställena till $J_0'(x) = -J_1(x)$.

Då fås egenvärdena $\underline{\lambda_n = \beta_n^2 = \left(\frac{\alpha_n}{a}\right)^2}$ och egenfunkt. $\underline{R_n(r) = J_0\left(\frac{\alpha_n r}{a}\right)}$.

$\{R_n(r)\}_{n=0}^{\infty}$ är en og-bas för $L_2(w, (0,a))$ där $w(r) = r$.

En funktion $f \in L_2(w, (0,a))$ kan utvecklas som

$$f(r) = c_0 R_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n R_n(r) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_0\left(\frac{\alpha_n r}{a}\right) \text{ med } c_n = \frac{1}{\|R_n\|^2}\int_0^a R_n(r) f(r)\, r\, dr, \quad n \geq 0.$$

$\|R_0\|^2 = \int_0^a 1^2 \cdot r\, dr = \frac{a^2}{2}$.

$n \geq 1$: $\|R_n\|^2 = \int_0^a J_0^2\left(\frac{\alpha_n r}{a}\right) r\, dr = \left[x = \frac{\alpha_n r}{a}\right] = \left(\frac{a}{\alpha_n}\right)^2 \int_0^{\alpha_n} J_0^2(x)\, x\, dx$

$$= \frac{a^2}{\alpha_n^2}\left[\frac{x^2}{2}\left(J_0^2(x) + J_1^2(x)\right)\right]_0^{\alpha_n} = \frac{a^2}{2} J_0^2(\alpha_n)$$

$f(r) = r^2$ ger $\int_0^a R_0(r) f(r)\, r\, dr = \int_0^a r^3\, dr = \frac{a^4}{4}$, och för $n \geq 1$

$$\int_0^a R_n(r) f(r)\, r\, dr = \int_0^a J_0\left(\frac{\alpha_n r}{a}\right) r^3\, dr = \left[x = \frac{\alpha_n r}{a}\right] = \left(\frac{a}{\alpha_n}\right)^4 \int_0^{\alpha_n} x^3 J_0(x)\, dx$$

$$\left(\frac{a}{\alpha_n}\right)^4 \underbrace{\left[x^2 \cdot x J_1(x)\right]_0^{\alpha_n}}_{=0} - \left(\frac{a}{\alpha_n}\right)^4 \int_0^{\alpha_n} 2x \cdot x J_1(x)\, dx = \left(\frac{a}{\alpha_n}\right)^4 \int_0^{\alpha_n} 2x^2 J_0'(x)\, dx$$

$$= \left(\frac{a}{\alpha_n}\right)^4 \left[2x^2 J_0(x)\right]_0^{\alpha_n} - \left(\frac{a}{\alpha_n}\right)^4 \int_0^{\alpha_n} 4x J_0(x)\, dx = \frac{2a^4}{\alpha_n^2} J_0(\alpha_n) - 4\left(\frac{a}{\alpha_n}\right)^4 \underbrace{\left[x J_1(x)\right]_0^{\alpha_n}}_{=0},$$

→ forts.

5) $c_0 = \frac{a^4}{4} \Big/ \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2}$, $\quad c_n = \frac{2a^4}{\alpha_n^2} J_0(\alpha_n) \Big/ \frac{a^2}{2} J_0^2(\alpha_n) = \frac{4a^2}{\alpha_n^2 J_0(\alpha_n)}$

$$\underline{\underline{r^2 = \frac{a^2}{2} + 4a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^2 J_0(\alpha_n)} J_0\left(\frac{\alpha_n r}{a}\right)}} \;; \quad \underline{\underline{J_0'(\alpha_n) = -J_1(\alpha_n) = 0}}$$

---

6) Avbildningen $w = \frac{z}{z-2i}$ avbildar $0<y<2$, $x=0$ på negativa realaxeln och $|z-1|=1$, $x>0$ på positiva imaginära axeln (($\sqrt{y}$ "c "cirklar" → "cirklar", $0 \to 0$, $i \to -1$, $2i \to \infty$ avb. är konform) och halvcirkelskivan Ω på andra kvadranten.

Vi skall nu bestämma en funktion $\Phi(u,v)$, som är harmonisk i andra kvadranten och uppfyller randvillkoren

$$\Phi(u,v) = \begin{cases} 0, & u<0,\ v=0 \\ P, & u=0,\ v>0. \end{cases}$$

Lösningen av formen

$$\Phi(u,v) = C_1 \operatorname{Arg} w + C_2$$

där

$$\begin{cases} C_1 \pi + C_2 = 0 \\ C_1 \frac{\pi}{2} + C_2 = P \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -\frac{2P}{\pi} \\ C_2 = 2P \end{cases}$$ så att

$$\Phi(u,v) = \frac{2P}{\pi}\left(\pi - \operatorname{Arg} w\right) = \frac{2P}{\pi}\left(\pi - \operatorname{arccot}\frac{u}{v}\right) = \frac{2P}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} + \arctan\frac{u}{v}\right).$$

Med substitutionen $w = \frac{z}{z-2i}$ får vi då en lösning $\varphi(x,y)$ till det givna problemet. Då

$$w = u+iv = \frac{x+iy}{x+(y-2)i} = \frac{(x+iy)(x-(y-2)i)}{x^2+(y-2)^2} = \frac{x^2+y^2-2y+2ix}{x^2+(y-2)^2}$$

blir alltså lösningen

$$\underline{\underline{\varphi(x,y) = \frac{2P}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} + \arctan\frac{x^2+(y-1)^2-1}{2x}\right).}} \ \boxtimes$$

/HA.