Hjälpmedel: Beta, Standard math. tabels, typgodkänd räknedosa
Telefon:
2006–01–14 kl. 08.30–13.30

MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola

TMA132 Fourieranalys F2/Kf2, 5 poäng

OBS! Ange namn, personnummer samt linje och inskrivningsår.

---

1. En lång cylinder har från början temperaturen 0 . Efter tiden $t = 0$ hålls mantelytan vid en periodiskt varierande temperatur. Bestäm temperaturutvecklingen i cylinderns inre. Den beskrivs av följande ekvationer:

$$u_t = \frac{1}{r}(ru_r)_r,\ 0 < r < b, t > 0,$$

$u(r,t)$ begränsad $u(r,0) = 0, u(b,t) = \sin t, t > 0$.
(*led: sök lösningen som en serie i Besselfunktioner.*)

2. Låt $F(\xi) = \int_1^5 \arctan(x^3)e^{-i\xi x}dx$. Beräkna $\int_{-\infty}^{\infty} F(\xi)\cos\xi d\xi$.

3. Med hjälp av konforma avbildningar hitta den elektrostatiska potentialen u i området

$$(x,y) \in \mathbb{R}^2,\quad x > 0, 0 < y < x, x^2 + y^2 < 1$$

som är lika med 0 på x-axeln $y = 0$, lika med 1 på cirkelbågen $x^2+y^2 = 1$, lika med -1 på linjen $y = x, 0 < x < 1$.

4. Hitta lösningen till randvärdeproblemet

$$u_{xx} + u_{yy} = 1,\ 0 < x < \pi, 0 < y < \pi,$$

$$u(0,y) = 0, u(\pi,y) = \sin y, u(x,0) = u(x,\pi) = 0.$$

5. Bestäm samtliga egenvärden och tillhörande egenfunktioner till Sturm-Liouvilleproblemet

$$e^{-2x}\frac{d}{dx}(e^{2x}u'(x)) + \lambda u(x) = 0,\ u(0) = 0, u(1) + u'(1) = 0.$$

Beskriv egenskaper av egenfunktioner. Utveckla funktionen $f(x) = e^x$ i Fourierserie m.a.p. det systemet.

6. Utveckla funktionen $f(\theta) = \sin(\theta/2)+1$ i en komplex Fourierserie på intervallet $(-\pi,\pi)$. Vilka formler ger serien för $\theta = 0, \pi/2, -\pi/2, -\pi, \pi$? Vilka Fourierutvecklingar får man med integrering av serien?? Med derivering av serien?? Formulera motsvarande regler.

7. Formulera och bevisa Besselolikheten för Fourierserier. I vilket fall gäller ekvation i stället för Besselolikheten.

8. Ortogonala och ortonormala funktionssystem i Hibertrum. Hur transformerar man ett icke-ortogonalt system funktioner till ett ortonormalt system? Vad betyder att ett system är en bas?

Varje uppgift kan ge max. 8 p. Skrivningen beräknas färdigrättas måndagen, den 28. jan. Lösningsförslag publiceras på kursens webbsida 16.jan.
G.Rozenblioum

Fourier Analys F2/KF2,
omtenta 20060114

1. Först transformerar vi problemet till homogena randvillkor. Söker $u(r,t) = \sin t + v(r,t)$. $V(r,t)$ är lösning till problemet

$$v_t = \frac{1}{r}(r v_r) - \cos t \;; \quad v(r,0)=0, \; v(b,t)=0.$$

- Vi vet att Besselfunktioner $J_0\left(\frac{\alpha_k}{b} r\right)$, $k = 1, 2, \ldots$ formar ett bas i $L_2(0,b)$ med viktfunktionen $w(r) = r$. Vi söker lösningen $v(r,t)$ som en serie

$$v(r,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)\, J_0\left(\frac{\alpha_k}{b} r\right).$$

Sätter in i ekvationen, multiplicerar med $J_0\left(\frac{\alpha_m}{b} r\right)$ och integrerar med vikten r från 0 till b:

$$T_m'(t) \int_0^b r J_0\left(\frac{\alpha_m}{b} r\right)^2 dr = -\left(\frac{\alpha_m}{b}\right)^2 \int_0^b r J_0\left(\frac{\alpha_m}{b} r\right)^2 dr\, T_k$$
$$- \cos t \int_0^b r J_0\left(\frac{\alpha_m}{b} r\right) dr \;, \quad T_m(0) = 0)$$

Integral i första raden är lika med $\frac{b^2 \cdot J_1(\alpha_m)}{2}$,

integral i andra raden är lika med $\frac{b^2}{\alpha_m} J_1(\alpha_m)$

T_m söks som en lösning till ordinära diff. ekvationen.

svar: $$T_m = \frac{2}{\alpha_m J_1(\alpha_m)} \frac{1}{\left(\frac{\alpha_m}{b}\right)^4 + 1}$$
$$\times \left(\left(\frac{\alpha_m}{b}\right)^2 e^{-\left(\frac{\alpha_m}{b}\right)^2 t} - \sin t - \left(\frac{\alpha_m}{b}\right)^2 \cos t \right)$$

2. Funktionen $F(\xi)$ kan skrivas som

$$F(\xi) = \int_1^5 \arctan(x^3)\cos x\xi\, dx - i\int_1^5 \arctan(x^3)\sin x\xi\, dx$$

$$= \frac{\pi}{2} C(\xi) - i\frac{\pi}{2} S(\xi)$$

där $C(\xi)$, $S(\xi)$ är Cos- och Sin -Fourier transformation av funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \arctan(x^3), & x \in (1,5) \\ 0, & x \notin (1,5). \end{cases}$$

Funktionen $S(\xi)$ är udda, därför

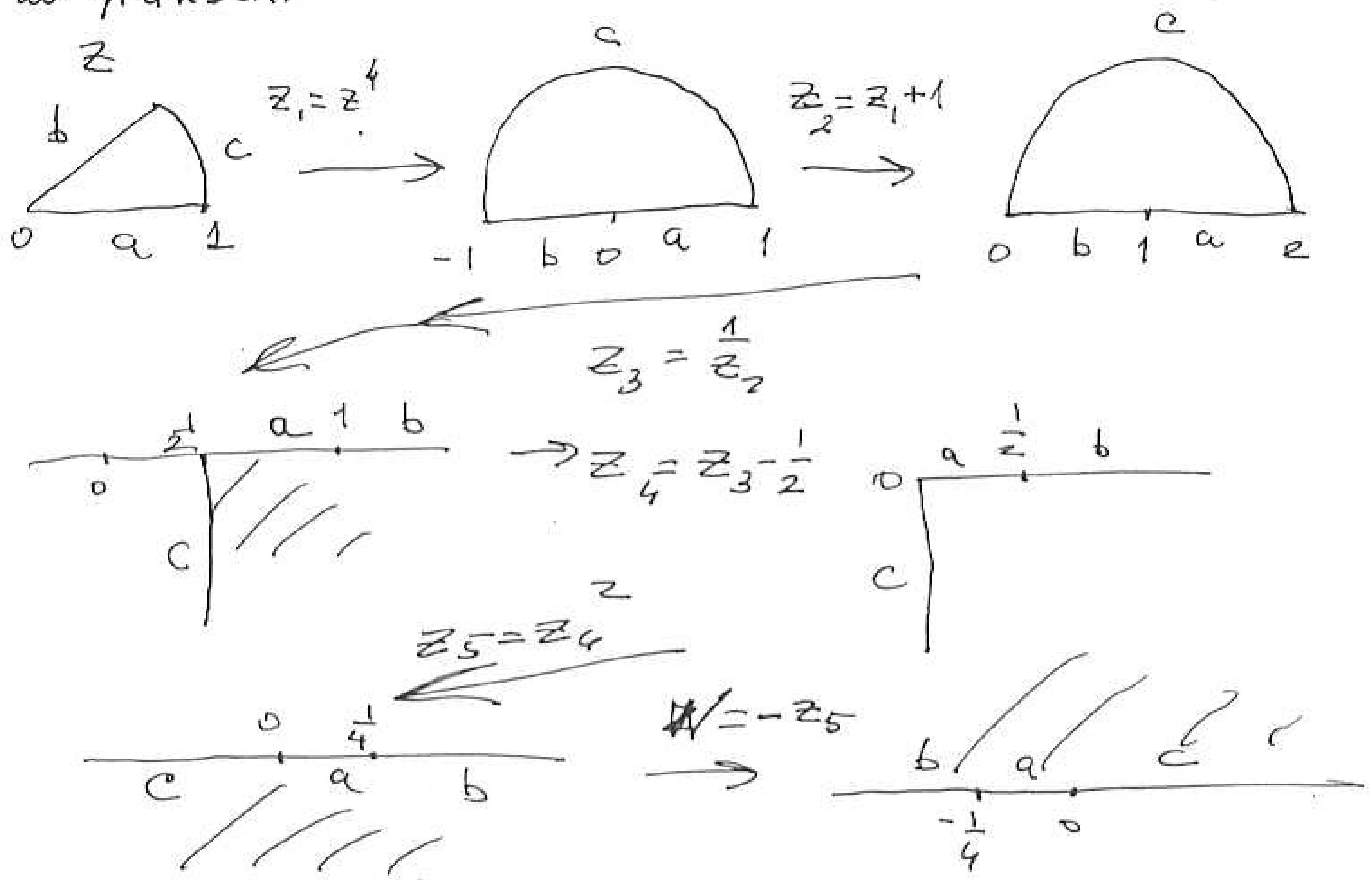
$$\int_{-\infty}^{\infty} S(\xi)\cos\xi\, d\xi = 0.$$

Så $\int_{-\infty}^{\infty} F(\xi)\cos\xi\, d\xi = \frac{\pi}{2}\int_{-\infty}^{\infty} C(\xi)\cos\xi\, d\xi$

$= \pi \int_0^{\infty} C(\xi)\cos(\xi 1)\, d\xi$. Integralen är den inversa cos - Fourier transformationen av $C(\xi)$ för $x = 1$. Enligt konvergenssatsen, i punkten $x = 1$, där $f(x)$ är icke-kontinuerlig, är integral lika med $\frac{f(1-0)+f(1+0)}{2}$

Så, $\int_{-\infty}^{\infty} F(\xi)\cos\xi\, d\xi = \frac{\pi}{2}\cdot\arctan 1 = \frac{\pi^2}{8}$.

3, Först hittar vi konforma avbildningen av vårt område på övre halvplanet. Med a, b, c märker vi olika delar av gränsen.



samlar alla deltransformationer:

$$w = -z_5 = -z_4^2 = -\left(z_3 - \frac{1}{2}\right)^2 = -\left(\frac{1}{z_2} - \frac{1}{2}\right)^2$$

$$= -\left(\frac{1}{z_1+1} - \frac{1}{2}\right)^2 = -\left(\frac{1}{z^4+1} - \frac{1}{2}\right)^2.$$

Söker harmoniska funktionen i W-planet

$$g(w) = A + B \arg\left(w + \frac{1}{4}\right) + C \arg w$$

på intervallet b, $A + \pi B + \pi C = -1$

på intervallet a, $A + \pi C = 0$

på intervallet c: $A = 1$

Löser systemet: $A = 1$, $C = -\frac{1}{\pi}$, $B = -\frac{1}{\pi}$

$$f(z) = 1 + \left(-\frac{1}{\pi}\right) \arg\left(w + \frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{1}{\pi}\right) \arg w$$

$$w = -\left(\frac{1}{z^4+1} - \frac{1}{2}\right)^2.$$

4. $u_{xx} + u_{yy} = 1$, $0 < x < \pi$, $0 < y < \pi$

$u(0,y) = 0$, $u(\pi, y) = \sin y$, $u(x,0) = u(x,\pi) = 0$.

Vi söker enkla lösningar i formen

$u(x,y) = X(x)Y(y)$ till homogena ekvationen

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = 0 \;;\; -\frac{X''}{X} = \frac{Y''}{Y} = -n^2$$

$\cancel{X''...=0, \lambda X}$ $Y'' = -n^2 Y$, $Y(0) = Y(\pi) = 0$

– S-L problem för Y, $Y_n(y) = \sin ny$, $n = 1, 2, \ldots$

Söker $u(x,y)$ i formen av serien

$$u(x,y) = \sum X_n(x) Y_n(y),$$

Sätter in i ekvationen:

$$\sum X_n''(x) \sin ny - \sum X_n(x) n^2 \sin ny = 1$$

multiplicerar med $\sin ky$ och integrerar $\int_0^\pi dy$:

$$\frac{\pi}{2}\left(X_n''(x) - n^2 X_n(x)\right) = \int_0^\pi \sin ny \, dy = \frac{2}{n}\left(1 - (-1)^n\right).$$

$$X_n(0) = 0, \quad X_n(\pi) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin ny \sin y \, dy$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left(\cos(n-1)y - \cos(n+1)y\right) dy \overset{\circ}{=} \begin{cases} 0, & n \neq 1 \\ 1, & n = 1 \end{cases}$$

Löser ekvationen

$$X_n'' - n^2 X_n = \frac{4}{\pi n}\left(1 - (-1)^n\right), \quad X_n(0) = 0, \quad X_n(\pi) = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

homogena ekvationen har lösningen

$$X_n(x) = A_n e^{nx} + B_n e^{-nx}$$

part. lösning till ohomog. ekv: $X_{n,\text{part}} = -\frac{4}{\pi n^3}\left(1 - (-1)^n\right)$.

anpassar A_n, B_n så att randvillkoren uppfylls.

$$\begin{cases} A_n + B_n - \frac{4}{\pi n^3}\left(1 - (-1)^n\right) = 0 \\ A_n e^{n\pi} + B_n e^{-n\pi} - \frac{4}{\pi n^3}\left(1 - (-1)\right)^n = \begin{cases} 0, & n \neq 1 \\ 1, & n = 1 \end{cases} \end{cases}$$

ur systemet hittar A_n, B_n.

5. egenvärdeekvationen kan transformeras till

$u'' + 2u' + \lambda u = 0$, $u(0)=0$, $u(1)+u'(1)=0$.

karakteristiska ekvationen har formen

$$k^2+2k+\lambda = 0$$

$$k = -1 \pm \sqrt{1-\lambda}.$$

Allmäna lösningen: $u(x) = Ae^{(-1+\sqrt{1-\lambda})x} + Be^{(-1-\sqrt{1-\lambda})x}$

$$= e^{-x}\left(Ae^{\sqrt{1-\lambda}\,x} + Be^{-\sqrt{1-\lambda}\,x}\right)$$

för $x=0$: $u(0)=0$, $A+B=0$.

för $x=1$: $Ae^{-1+\sqrt{1-\lambda}} + Be^{-1-\sqrt{1-\lambda}} +$

$$A(-1+\sqrt{1-\lambda})e^{-1+\sqrt{1-\lambda}} + B(-1-\sqrt{1-\lambda})e^{-1-\sqrt{1-\lambda}} = 0$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ \cancel{A}\sqrt{1-\lambda}\left(Ae^{-1+\sqrt{1-\lambda}} + Be^{-1-\sqrt{1-\lambda}}\right) = 0. \end{cases}$$

fall 1: $\lambda = 1$, $A=-B$, $u=0$ – ej egenfunktion

fall 2: $\lambda \neq 1$: $A=-B$ sätter in i andra ekvationen.

$$e^{\sqrt{1-\lambda}} - e^{-\sqrt{1-\lambda}} = 0, \quad e^{2\sqrt{1-\lambda}} = 1,$$

$$2\sqrt{1-\lambda} = 2\pi i n, \quad n = 1,2,3,4,\dots$$

$$\lambda_n = \pi^2 n^2 + 1, \quad u_n(x) = A_n e^{-x}\sin n\pi x.$$

Normeringskonstanter A_n: $u_n(x)$ måste vara normerade med avseende på viktfunktionen $e^{2x} = w$,

$$\int_0^1 A_n^2 e^{-2x} e^{2x} \sin^2(n\pi x)\,dx = 1; \quad A_n = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

F-koefficienter av e^{x}: $c_n = \int_0 e^{x} u_n(x)\, w(x)\, dx$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 e^{x} e^{-x} \sin(n\pi x)\, e^{2x}\, dx.$$ Integral hittar i BETA.

$$6.\ c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sin\frac{\theta}{2}+1\right)e^{-in\theta}\,d\theta$$

$$= \frac{1}{4\pi i}\int_{-\pi}^{\pi}\left(e^{i\frac{\theta}{2}}-e^{-i\frac{\theta}{2}}+1\right)e^{-in\theta}\,d\theta$$

$$(n\neq 0) = \frac{1}{4\pi i}\left(\frac{-1}{i(n-\frac{1}{2})}e^{-i(n-\frac{1}{2})\theta}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{i(n+\frac{1}{2})}e^{-i(n+\frac{1}{2})\theta}\Big|_{-\pi}^{\pi}\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi i}\left(\frac{-2}{(n-\frac{1}{2})}\sin(n-\cancel{\tfrac{1}{2}})\pi + \frac{2}{n+\frac{1}{2}}\sin(n+\tfrac{1}{2})\pi\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{n-\frac{1}{2}}\cdot(-1)^n - \frac{1}{n+\frac{1}{2}}(-1)^n\right) = \frac{(-1)^n}{2\pi i}\frac{1}{n^2-\frac{1}{4}}.$$

för $n=0$, $c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{\pi}\left(\sin\frac{\theta}{2}+1\right)d\theta = 1$.

Serien konvergerar mot $f(x)$ i alla punkter utom $x = \pm\pi, \pm 3\pi, \ldots$, eftersom f är icke-kontin. i dessa punkter. i $x=\pi$ och i $x=-\pi$ är summan av serien $\frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{2}+1\right)+\left(\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)+1\right) = 1$.

f är icke-kontinuerlig. ~~Att~~ derivera serien är inte tillåtet. Integrerar $f(\theta)$:

$$F(\theta) = \int_0^{\theta} f(x)\,dx = 2\cos\frac{\theta}{2}+\theta$$

$$F(\theta) = c_0\theta + \sum_{n\neq 0}\frac{c_n}{in}e^{in\theta} + C_0$$

$$C_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(\theta)\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}\left(2\cos\frac{\theta}{2}+\theta\right)d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}(4+2\pi).$$