Hjälpmedel: Beta, Standard math. tables, typgodkänd räknedosa

MATEMATIK Telefon: 0762721860

Chalmers tekniska högskola 2007–01–20 kl. 08.45–13.45

MVE030 Fourieranalys F2/Kf2, 4 poäng (TMA132,5p.)

OBS! Ange namn, personnummer, kurskod samt linje och inskrivningsår.

---

1. Med hjälp av utveckling i Fourier-Bessel serie hitta en radial lösning $u(r,t)$ av randvärdeproblem för värmeekvationen
$$u_t = \Delta u - u$$
i cirkelskivan $r < 3$ med begynnelsevillkoret $u(r,0) = 9 - r^2, 1 \leq r \leq 3,\ u(r,0) = 8, r < 1$ och randvillkoret $u(r,t) = 0$ för $r = 3$.

2. Hitta andragradpolynomet $P(x)$ som minimerar $\int_0^2 |x^3 - P(x)|^2 x dx$.

3. Med hjälp av Fourierserier hitta en lösning med period 4 till differentialekvationen $y''' - 3y'' + y = f(t)$, där $f(t) = t^2,\ 0 < t < 2,\ f(t) = e^{-t},\ 2 < t < 4$ och f är en funktion med perioden 4.

4. Funktionen f definieras av $f(x) = \int_0^{\pi} e^{ix\xi}\sqrt{\sin\xi}\, d\xi$. Beräkna
$$(a)\ \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx; \qquad (b)\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx; \qquad (c)\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(x) e^{5ix} dx,$$
där $\hat{g}(\xi) = \xi^{-\frac{1}{3}}$ för $\xi \in (0,1)$, $g = 0$ utanför $(0,1)$.

5. Lös Laplaceekvationen $\Delta u = 0$ i rektangeln $x \in (0,\pi), y \in (0,2\pi)$ med randvillkoren $u(x,0) = \sin x, u(x,2\pi) = 0,\ u(0,y) = \sin(2y), u(\pi,y) = 0$.

6. **för MVE030:** Hitta, m.h.a. Fouriertransformation, en begränsad lösning till Cauchyproblemet
$$u_{tt} = u_{xx} + 2u_x + u; t > 0, x \in \mathbb{R};\ u(x,0) = f(x); f \in L^1, \hat{f} \in L^1;$$
för TMA132: Bestäm m.h.a. konforma avbildningar lösningen till Laplaceekvationen $\Delta u = 0$ i halvplanet $y > 0$ med randvillkoren $u(x,0) = 1, 1 < x < 2, u(x,0) = -1, 2 < x < 5, x = 0, x > 5, u_y = 0, x < 1$. `Led: Transformera först halvplanet till ett kvartplan med Neumann randvillkoret på` y`-axeln och använd symmetri för att bli av med Neumann randvillkoret.`

7. **för MVE030:** Vad är ett Sturm-Liouville problem? Vilka S-L problem kallas för reguljära, singulära? Ge exempel. Berätta så mycket du kan om egenskaper av egenfunktioner och egenvärden.
för TMA132: Berätta så mycket du kan om tillämpningar av analytiska funktioner och konforma avbildningar i hydrodynamik.

8. Berätta så mycket du kan om Legendrepolynomer, deras egenskaper och tillämpningar. Det blir bättre om några bevis finns.

Varje uppgift kan ge max. 8 p. Skrivningen beräknas färdigrättas måndagen, den 29. jan. Lösningsförslag publiceras 22.jan på kursens webbsida av året 05/06.

G.Rozenblioum

GR

MVE030/TMA132, Tenta 2007-01-20

Lösningar.

(1). $u_t = \Delta u - u$, $r < 3$. Söker element. lösn. $u(x,t) = R(r)\,T(t)$. Sätter in och separerar variabler.

$$\frac{T'(t)}{T(t)} + 1 = \frac{R''(r) + r^{-1}R'(r)}{R(r)} = -\mu^2$$

$R'' + r^{-1}R'(r) + \mu^2 R(r) = 0$ - Besselekvation, lösning: $R(r) = J_0(\mu r)$. Randvillkoret

$J_0(3\mu) = 0$; $3\mu = \lambda_n$ - nollställe till J_0.

$$\mu_n = \frac{\lambda_n}{3};\quad R_n(r) = J_0\left(\frac{\lambda_n}{3} r\right).$$

T-ekvation: $T' = -(1+\mu^2)T = -\left(1+\left(\frac{\lambda_n}{3}\right)^2\right)T$

$$T_n = c_n \exp\left(-\left(1+\left(\frac{\lambda_n}{3}\right)^2\right)t\right).$$

Lösningen med beg. villkor:

$$u = \sum c_n J_0\left(\frac{\lambda_n}{3} r\right) \exp\left(-\left(1+\left(\frac{\lambda_n}{3}\right)^2\right)t\right).$$

$t=0$: $$\sum c_n J_0\left(\frac{\lambda_n}{3} r\right) = \varphi(r) = \begin{cases} 9-r^2, & 1 \le r \le 3 \\ 8 & r < 1 \end{cases}$$

multiplicerar med $J_0\left(\frac{\lambda_n}{3} r\right)$, integrerar!

$$c_n = \frac{1}{\|J_0\left(\frac{\lambda_n}{3} r\right)\|^2}\left[\int_0^1 8r\,J_0\left(\frac{\lambda_n}{3} r\right)dr + \int_1^3 (9-r^2)\,J_0\left(\frac{\lambda_n}{3} r\right) r\,dr\right].$$

Integraler beräknas med hjälp av rekurrenta formler.

2. Vi tar funktioner $f_0 = 1$, $f_1 = x$, $f_2 = x^2$ och ortogonaliserar enligt Gram-Schmidt på intervallet $(0,2)$ med viktfunktion x.

$$\|f_0\|^2 = \int_0^2 1^2 x\,dx = 2\,; \quad \varphi_0 = \frac{f_0}{\|f_0\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,;$$

$$\langle f_1, \varphi_0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^2 x \cdot 1 \cdot x\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2^3}{3} = \frac{8}{3\sqrt{2}}$$

$$f_1 - \langle f_1, \varphi_0 \rangle \varphi_0 = x - \frac{4}{3}$$

$$\varphi_1 = \frac{x - \frac{4}{3}}{\|x - \frac{4}{3}\|} = \frac{x - \frac{4}{3}}{\sqrt{\int_0^2 (x - \frac{4}{3})^2 x\,dx}} = \text{osv.}$$

$$\varphi_3 = \frac{f_2 - \langle f_2, \varphi_1 \rangle \varphi_1 - \langle f_2, \varphi_0 \rangle \varphi_0}{\| f_2 - \langle f_2, \varphi_1 \rangle \varphi_1 - \langle f_2, \varphi_0 \rangle \varphi_0 \|}$$

Efter detta hittas approximerande polynomen:

$$P(x) = \langle x^3, \varphi_0 \rangle \varphi_0 + \langle x^3, \varphi_1 \rangle \varphi_1 + \langle x^3, \varphi_2 \rangle \varphi_2.$$

3. Perioden $T = 4$, $\Omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}$

givna funktionen f utvecklas i F-serie med perioden T:

$$f(t) = \sum c_n e^{in\frac{\pi}{2}t},$$

$$c_n = \frac{1}{2} \int_0^4 f(t) e^{-in\frac{\pi}{2}t} dt$$

- integralen beräknas.

- Söker lösningen $y(t)$ som en F-serie

$$y(t) = \sum y_n e^{in\frac{\pi}{2}t}$$

sätter in i ekvationen och jämför koefficienterna:

$$-\left(in^3\left(\frac{\pi}{2}\right)^3\right)y_n + 3n^2\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 y_n + y_n = c_n$$

därifrån hittar y_n.

1. $f(x) = \int_0^{\pi} e^{ix\xi} \sqrt{\sin\xi}\, d\xi$. Det betyder att f är 2π gånger den inversa F-transf. av

$$F(\xi) = \begin{cases} \sqrt{\sin\xi}, & \xi \in (0,\pi) \\ 0, & \xi \notin (0,\pi) \end{cases} ; \quad F(\xi) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi}\, d\xi$$

Enligt Plancherel,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}(\xi)|^2 d\xi$$

$$= \frac{(2\pi)^2}{2\pi} \int_0^{\pi} (\sqrt{\sin\xi})^2 d\xi = 2 \cdot \frac{(2\pi)^2}{2\pi} = 4\pi$$

Vidare, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ix\cdot 0} dx$

$$= \tilde{f}(0) = 0$$

Slutligen, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(x) e^{5ix} dx$, enligt plancherel,

$$= \langle f(x), g(x) e^{5ix} \rangle =$$

$$\frac{1}{2\pi} \langle \tilde{f}(\xi), \widetilde{g e^{5ix}}(\xi) \rangle$$

och man kan se att $\tilde{f}(\xi) = 0$ utanför intervallet $(0, \pi)$, och ~~$\widetilde{ge^{5ix}}$~~ F-transformation av $g(x) e^{5ix} = 0$ utanför intervallet $(5, 6)$. Da

$\tilde{f} \cdot \widetilde{g e^{5ix}} = 0$ överallt och integral $= 0$.

5. $\Delta u = 0$, $x \in (0,\pi)$, $y \in (0, 2\pi)$

$u(x,0) = \sin x$, $u(x,2\pi) = 0$

$u(0,y) = \sin 2y$, $u(\pi, y) = 0$.

Framställer $u(x,y)$ som summan av 2 funktioner $u(x,y) = v(x,y) + w(x,y)$. Funktioner satisfierar problem

$\Delta v = 0$, $v(x,0) = \sin x$, $v(x,2\pi) = 0$

$v(0,y) = 0$, $v(\pi,y) = 0$

$\Delta w = 0$, $w(x,0) = 0$, $w(x,2\pi) = 0$

$w(0,y) = \sin 2y$, $w(\pi,y) = 0$.

Vi löser problem för v: Delar variabler:

$\Delta v = 0$, $v(x,y) = X(x)Y(y)$,

$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = 0$; $\frac{X''}{X} = -\lambda^2$, $\frac{Y''}{Y} = \lambda^2$

Löser S-L problem $X'' + \lambda^2 X = 0$ med randvillkoren $X(0) = X(\pi) = 0$ (det följer ur randvillkoren för $V(x,y)$).

$X_n(x) = \sin nx$, $\lambda_n = n$,

~~$Y_n(y)$ = Löser ekvationen för~~ $Y(y)$:

$Y'' - n^2 Y = 0$ Söker lösningen i formen

$v(x,y) = \sum \sin nx \, Y_n(y)$. Sätter in i ekvationen: $Y_n''(y) = n^2 Y_n(y)$.

Randvillkoren

1 $V(x,0) = \sum \sin nx \, Y_n(0) = 0$

2 $V(x,2\pi) = \sum \sin nx \, Y_n(2\pi) = \sin x$

multiplicerar med $\sin kx$ och integrerar:

$Y_k(0) = 0$ alla k; $Y_k(2\pi) = 0$, $k \neq 1$,

$Y_1(2\pi) = 1$. Löser ekvationen:

$Y_1'' = Y_1$, $Y_1(0) = 0$, $Y_1(2\pi) = 1$: Lösningen $Y_1(y) = \frac{\sinh y}{\sinh(2\pi)}$

$v(x,y) = \sin x \cdot \sinh y / \sinh(2\pi)$

$w(x,y)$ hittas på samma sätt.

6 MVE.

$u_{tt} = u_{xx} + 2u_x + u \quad , t > 0$

Fourier i x-led. $v = \hat{u}(\xi, t)$

$v_{tt} = -\xi^2 v + 2i\xi v + v = (-\xi^2 + 2i\xi + 1) v$

Löser ekvationen $= (i\xi + 1)^2 v$

karakteristiska ekvationen

$k^2 = (i\xi + 1)^2 \; ; \; k = \pm (i\xi + 1)$

$v(\xi, t) = A(\xi) e^{(i\xi+1)t} + B(\xi) e^{-(i\xi+1)t}$

med okända $A(\xi)$, $B(\xi)$.

Termen $A(\xi) e^{(i\xi+1)t}$ växer exponentiellt när $t \to +\infty$, vi söker en begränsad lösning, därför $A(\xi) = 0$

$v(\xi, t) = B(\xi) e^{-(i\xi+1)t}$

För att hitta $B(\xi)$, använder begynnelsevillkor: $v(\xi, 0) = B(\xi) = \hat{f}(\xi)$

$B(\xi) = \hat{f}(\xi)$

$v(\xi, t) = \hat{f}(\xi) e^{-i\xi t} e^{-t}$

$u(x,t) =$ invers F-transform av $v(\xi, t)$,

$= f(\xi + t) e^{-t}$.

$\boxed{6\ TMA}$. $\Delta u = 0$, $y > 0$:

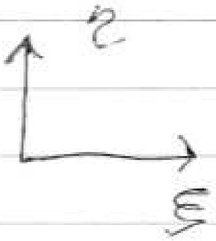
$u(x,0) = 1$, $1 < x < 2$; $u(x,0) = -1$, $2 < x < 5$,

$u_y = 0$, $x > 5$; $u_y = 0$, $x < 1$.

T: $z = x + iy$. transformerar till kvartplanet:

$w = (z-1)^{\frac{1}{2}}$. Problemet ~~[illegible]~~

transformeras till:



$v(w)$, $\Delta w = 0$ i kvarten,

$w = \xi + i\eta$, $\xi, \eta > 0$

$v_\xi = 0$ på linjen $\xi = 0$

$v(\xi,0) = 1$, $0 < \xi < 1$; $v(\xi,0) = -1$, $1 < \xi < 2$,

$v(\xi,0) = 0$, $\xi > 2$.

Fortsätter v som en jämn funktion på hela övre halvplanet $\eta > 0$. Det är möjligt eftersom $v_\xi = 0$ på η-axeln.

Då kommer vi till ett problem

$\Delta v(\xi,\eta) = 0$, $\eta > 0$ med randvillkoren

$$\left.\begin{array}{l} v(\xi,0) = 0, \quad \xi < -2; \\ v(\xi,0) = -1, \quad -2 < \xi < -1 \\ v(\xi,0) = 1, \quad -1 < \xi < 0 \\ v(\xi,0) = 1, \quad 0 < \xi < 1 \\ v(\xi,0) = -1, \quad 1 < \xi < 2, \\ v(\xi,0) = 0, \quad \xi > 2. \end{array}\right\}$$

Det är ett standart problem och lösas genom

$v(\xi,\eta) = A\arg(w+2) + B\arg(w+1) + C\arg(w-1)$

$+ D\arg(w-2) + E.$