Hjälpmedel: Beta, Standard math. tabels, typgodkänd räknedosa

MATEMATIK — Telefon: Christoffer Cromvik, 0762721860

Chalmers tekniska högskola — 2007–08–28 kl. 08.30–13.30

MVE030 Fourieranalys F2/Kf2, 6HP (4 gamla poäng) (TMA132 7,5 HP)

OBS! Ange **kurskod**, namn, personnummer samt linje och inskrivningsår.

---

1. En lång cylinder har från början temperaturen 0 . Efter tiden $t = 0$ hålls mantelytan vid en periodiskt varierande temperatur. Bestäm temperaturutvecklingen i cylinderns inre. Den beskrivs av följande ekvationer:
$u_t = \frac{1}{r}(ru_r)_r,\ 0 < r < 1, t > 0,\ u(r,t)$ begränsad, $u(r,0) = 0, u(1,t) = \sin(2t), t > 0$.
(*led: sök lösningen som en serie i Besselfunktioner.*)

2. a) **MVE030** Låt $F(\xi) = \int_2^8 \ln(x^2+1)e^{-i\xi x}dx$. Beräkna $\int_{-\infty}^{\infty} F(\xi)\cos\xi d\xi$, $\int_{-\infty}^{\infty} F(\xi)\cos(2\xi)d\xi$, $\int_{-\infty}^{\infty} F(\xi)\cos(3\xi)d\xi$.

   b) **TMA132** Med hjälp av konforma avbildningar hitta den elektrostatiska potentialen u i området $(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \ x > 0, 0 < y < x, x^2+y^2 < 1$ som är lika med 1 på x-axeln $y = 0$, lika med -1 på cirkelbågen $x^2+y^2 = 1$, lika med 0 på linjen $y = x, 0 < x < 1$.

3. Hitta lösningen till randvärdeproblemet

$$u_{xx} + u_{yy} = 2,\ 0 < x < \pi, 0 < y < \pi,$$

$$u(0,y) = 0, u(\pi,y) = \sin y, u(x,0) = u(x,\pi) = 0.$$

4. Bestäm samtliga egenvärden och tillhörande egenfunktioner till Sturm-Liouvilleproblemet

$$e^{-4x}\frac{d}{dx}(e^{4x}u'(x)) + \lambda u(x) = 0,\ u(0) = 0, u(1) + u'(1) = 0.$$

Beskriv egenskaper av egenfunktioner. Utveckla funktionen $f(x) = e^x$ i Fourierserie m.a.p. det systemet.

5. Bestäm det polynom $P(x)$ av högst andra graden som minimerar

$$\int_0^{\infty} [e^{-2x} - P(x)]^2 x e^{-x} dx.$$

6. Bestäm med hjälp av Fouriertransformation en lösning till $u''(t) - u(t) = te^{-3|t|},\ -\infty < t < \infty$. Hitta alla lösningar.

7. a) Formulera och bevisa Besselolikheten för Fourierserier. I vilket fall gäller ekvation i stället för Besselolikheten?

   b) Formulera regler för derivering och integrering av Fourierserier. Ge exempel.

8. a) **MVE030** Berätta så mycket du kan om diskreta Fouriertransformen. Bestäm den diskreta Fouriertransformen av $x_n = 2^n,\ n = 0, \ldots, N-1$. Vad får man om man använder Parseval formel till x_n?

   b) **TMA132**Berätta så mycket du kan om strömproblem och tillämpningen av konformavbildningar för att lösa dem.

Varje uppgift kan ge max. 8 p. Skrivningen beräknas färdigrättas den 13. sept. Lösningsförslag publiceras på kursens webbsida (år 06-07) den 3.sept.

GR

Fourieranalys MVE030 / tma 132 (1)

Tenta 2007-08-28. Lösningar

1. Randvillkoren är ohomogena; förberedelsesteget krävs. Sätter $v(r,t) = u(r,t) - \sin 2t$. funktionen $v(r,t)$ satisfierar randvillkors och ekvationen

$$v(1,t) = 0, \quad v(r,0) = 0$$

$$v_t = v_{rr} + \frac{1}{r} v_r - 2\cos 2t$$

variabelseparation:

elementära lösningar i formen $R(r)T(t)$. Sätter in i ekvationen och randvillkoren, får

$$R'' + \frac{1}{r} R' + \lambda^2 R = 0$$

$$R_n(r) = J_0(\lambda_n r), \quad \lambda = \lambda_n.$$

λ_n - nollställen av Besselfunktionen $J_0(x)$

Söker lösningen $v(r,t)$ på formen

$$v(r,t) = \sum T_n(t) J_0(\lambda_n r)$$

Sätter in i ekvationen

$$\sum T_n'(t) J_0(\lambda_n r) + 2\cos 2t = -\sum T_n(t) \lambda_n^2 J_0(\lambda_n t).$$

(*)

Utvecklar 2 i Fourier-Bessel serie (2)

$$2 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_0(\lambda_n r)$$

$$c_n = \frac{\langle 2, J_0(\lambda_n r)\rangle}{\| J_0(\lambda_n r)\|^2} = 4 \sum \frac{J_0(\lambda_n r)}{J_1(\lambda_n)}.$$

Sätter in i ekvationen (*) och får

$$T_n'(t) + \lambda_n^2 T_n(t) = -\frac{4}{J_1(\lambda_n)} \cos 2t$$

Löser den ekvationen med begynnelsevillkoren $T_n(0) = 0$ och får svaret.

2a.

$$F(\omega) = \int_2^8 \ln(x^2+1)\, e^{-i\omega x}\, dx$$

är Fourier-transformation av funktionen $f(x) = \begin{cases} \ln(x^2+1), & x \in (2,8) \\ 0, & x \notin (2,8). \end{cases}$

Vi har

$$h(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cos(z\omega)\, d\omega =$$

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\left(e^{iz\omega} + e^{-iz\omega}\right) d\omega$$

och, enligt inversionsaten för F-transformation, är lika med

$\frac{2\pi}{2}\left(f(z)+f(-z)\right)$ i punkter, där f är kontinuerlig

och

$\frac{2\pi}{4}\left(f(z+0)+f(z-0)+f(-z+0)+f(-z-0)\right)$ i punkter där f inte är kontin.

Så:
$h(1) = \pi\left(f(1)+f(-1)\right) = 0$

$h(2) = \frac{\pi}{2} \ln 5$ (f är inte kont i 2)

$h(3) = \pi \ln 10$.

2b. Konforma avbildningen

$w = \left(\dfrac{z^4-1}{z^4+1}\right) = f(z)$ avbildar vårt 5

område till halvplanet $\operatorname{Im} w > 0$.

Punkten 0 avbildas till $f(0) = -1$

1 avbildas till $f(1) = 0$

$\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ avbildas till ∞

så måste vi söka en function $v(w)$ som är harmonisk i övre halvplanet som har värdet 0 på $(0,\infty)$, värdet -1 på $(-\infty,-1)$ och värdet -1 på $(-1,0)$. Detta görs på det vanliga sättet:

$$v(w) = A + B \arg(w+1) + C \arg w$$

och koefficienterna anpassas.

3. Problemet har homogena randvillkor i y variabel. Vi delar variabler (4)

$$u(x,y) = X(x)\,Y(y)$$

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \lambda$$

vi får egenvärdeproblem

$$\frac{Y''}{Y} = \lambda \,, \quad Y(0) = 0 \,, \quad Y(\pi) = 0$$

egenvärden $\lambda_n = n^2$,

egenfunktioner $Y_n(y) = \sin ny$,

$n = 1, 2, \ldots$

Söker lösningen av ursprungliga problemet på formen

$$u(x,y) = \sum X_n(x)\,Y_n(y)$$

Sätter in i ekvationen

$$\sum X_n'' Y_n + \sum X_n Y_n'' = 2$$

$$\sum \left(X_n'' - n^2 X_n \right) Y_n = 2 = \sum c_n Y_n$$

~~utveckla~~

$$c_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 2 \cdot \sin ny \, dy$$

$$X_n'' - n^2 X_n = c_n$$

med randvillkor

$X(0) = 0$: $X_n(\pi) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 0, & n > 1 \end{cases}$

$$4. \quad e^{-4x}\left[\frac{d}{dx}\left(e^{4x}u'(x)\right)+\lambda u(x)\right]=0$$

(5)

$$u(0)=0, \quad u(1)+u'(1)=0$$

Föst transformerar vi ekvationen till standarsta Sturm-Liouville formen

$$\frac{d}{dx}\left(e^{4x}u'(x)\right)+\lambda e^{4x}u(x)=0$$

Så, viktfunktionen $w(x)=e^{4x}$, och egenfunktioner blir ortogonala m.a.på den vikten.

Löser ekvationen:

$$u''+4u'+\lambda u = 0$$

Söker, som vanlig, $u=e^{kx}$

$$k^2+4k+\lambda=0$$

$$k_{1,2}=-2\pm\sqrt{4-\lambda}$$

$$u= e^{-2x}\left(ae^{\sqrt{4-\lambda}\,x}+be^{-\sqrt{4-\lambda}\,x}\right)$$

Ur första randvillkoret:

$$a=-b,$$

$$u= a\, e^{-2x}\left(e^{\sqrt{4-\lambda}\,x}+be^{-\sqrt{4-\lambda}\,x}\right)$$

Ur det andra randvillkoret hittar vi egenvärden och egenfunktioner.

..........linaen av e^{-x} görs med hjälp

5. Intervallet är $(0,\infty)$, viktfunktionen 6
$w(x) = xe^{-x}$, det hänvisar på
Laguerre polynomer $L_n^{(1)}$.
Så, $P(x) = a L_0^{(1)} + b L_1^{(1)} + c L_2^{(1)}$
och koefficienterna a, b, c är
Fourier koefficienter av $f(x) = e^{-2x}$ med avseende på Laguerre
systemet,

$$a = \frac{\langle e^{-2x}, L_0^{(1)} \rangle_w}{\| L_0^{(1)} \|^2}$$

$$b = \frac{\langle e^{-2x}, L_1^{(1)} \rangle_w}{\| L_1^{(1)} \|^2}$$

$$c = \frac{\langle e^{-2x}, L_2^{(1)} \rangle_w}{\| L_2^{(1)} \|^2}.$$

6. Fouriertransformerar ekvationen
vi kommer till

$$U(\omega)(-1-\omega^2) = -\frac{4i \cdot 3 \cdot \omega}{(3^2+\omega^2)^2}$$

$\Rightarrow U(\omega) = \frac{1}{\omega^2+1} \cdot \frac{12i\omega}{\ldots}$. F-transform