Hjälpmedel: Beta, Standard Math. Tables, typgodkänd räknedosa
MATEMATIK
Telefon: Ragnar Frej 0762-721860
Chalmers tekniska högskola
2008–01–18 kl. 08.30–13.30

Fourieranalys F2/Kf2, MVE030, 6 poäng TMA132, 7,5 poäng

OBS! Ange namn, personnummer, kurskod samt linje och inskrivningsår.

---

1. Med hjälp av utveckling i Fourier-Bessel serie hitta en lösning $u(r,\theta,t)$ av randvärdeproblem för värmeekvationen $u_t = 2\Delta u - 5u$ i cirkelskivan $r < 1$ med begynnelsevillkoret $u(r,\theta,0) = r^3\cos(3\theta)$ och randvillkoret $u_r(r,\theta,t) = \cos(3\theta)$ för $r = 1$. **Tips: sök lösningen på formen** $u(r,\theta,t) = v(r,t)\cos(3\theta)$

2. a) **MVE030**Utveckla i serie i Legendrepolynomer på intervallet $(-1,1)$ funktionen $f(x)$: $f(x) = x^3, x \in (0,1), f(x) = 0, x \in (-1,0]$. (Värdet av $P_n(0)$ tas ur BETA).

   b) **TMA132** Med hjälp av konforma avbildningar och symmetri hitta i området $(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \ 0 < y < x$, den elektrostatiska potentialen u, $\Delta u = 0$, som är lika med 1 på x-axeln $y = 0$, $0 < x < 2$, lika med -1 för $y = 0$, $x > 2$, och som har normalderivatan 0 på linjen $y = x$.

3. Lös med hjälp av utvecklingen i Fourier serie i egenfunktioner av ett passande Sturm-Liouville problem ekvationen

$$u_{tt} - 2u_t + 5u = u_{xx}, 0 < x < \pi, t > 0$$

   med randvillkoren $u_x(0,t) = 1, u(\pi,t) = 1$ och begynnelsevillkoren $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 0$.

4. Med hjälp av Fouriertransformation bestäm en lösning till problemet

$$u_{xx} + u_{yy} = 0,\ -\infty < x < \infty, y > 0; u(x,0) = \frac{x}{x^2+1}. \qquad (1)$$

   Lösningen anges i sluten form (utan kvarvarande integraler).

5. Funktionen $f(x)$ definieras som $f(x) = \int_0^2 e^{ix\xi}/(1+\xi)d\xi$. Beräkna (a) $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx$, (b) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$, (c) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{2ix}dx$, (d) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)e^{-3ix}dx$ där $\hat{g}(\xi) = \cos(\xi), \xi \in (5,6)$, $\hat{g}(\xi) = 0$ utanför $(5,6)$.

6. Lös ekvationen $u_{xx} + u_{yy} - u = 0$ i rektangeln $x \in (0,1), y \in (0,2\pi)$ med randvillkoren $u_y(x,0) = x(1-x), x \in (0,1)$, $u = 0$ på resten av randen. Använd F-serie i något led.

7. a) **MVE030** Berätta om reglerna för termvis derivering och termvis integrering av Fourier serier. Ange exempel. Förklara var felet i den följande resonemangen finns. Låt f vara 2π-periodiska funktionen so är lika med e^θ för $\theta \in (0,2\pi)$; dennes F-serie är $e^\theta = \sum c_n e^{in\theta}$. Termvis derivering ger $e^\theta = \sum inc_n e^{in\theta}$. Jämförelse ger $(1-in)c_n = 0$, $c_n = 0$ för alla n.

   b) **TMA132** Berätta så mycket som du kan om tillämpningar av konforma avbildningar i hydrodynamik.

8. Berätta så mycket som du kan om samplingsprocessen, samplingsteorem och tillämpningar.

Varje uppgift kan ge max. 8 p. Skrivningen beräknas färdigrättas den 25. januari. Lösningsförslag publiceras på kursens webbsida 21.januari.

Fourier Analys F2/Kf2
MVE030 (TMA132)

Tenta 2008-01-19.
Lösningförslag.

---

1 Sök lösningen på formen $u(r,\theta,t) = v(r,t)\cos 3\theta$. Då transformeras problemet till

$$v_t = 2v_{rr} + 2r^{-1}v_r - 9r^{-2}v - 5v$$

med randvillkoren $v_r(r,t) = 1$, $r=1$.
~~rand~~ och begynnelsevillkoret $v(r,0) = r^3$.
Vi gör förberedelsesteg: $v(r,t) = \frac{r^3}{3} + w(r,t)$ så satisfierar $w(r,t)$ ekvationen

$$w_t = 2w_{rr} + 2r w_r - 9r^{-2}w - 5w - \frac{5r^3}{3} + 2r^3 - 3r^3$$

med randvillkoren $w_r(r,t)=0$, $r=1$ och begynnelsevillk. $w(r,0) = \frac{2}{3}r^3$.
Efter variabelseparation kommer vi till Besselekvation med $\nu = 3$, och lösningen på vanliga sätt uttryckes genom Besselfunktioner $J_3(\mu_k r)$ där μ_k - nollställen av J_3'.

2. a $f(x) = \sum_{n=0} c_n P_n(x)$

där koefficienterna c_n är lika med

$$c_n = \frac{\langle x^3, P_n(x)\rangle_{(0,1)}}{\|P_n\|^2} = \frac{\int_0^1 x^3 P_n(x)\,dx}{\|P_n\|^2}$$

Integralen beräknas med hjälp av partielintegrering och formeln

$$P_n(x) = \frac{1}{2n+1}\left(P_{n+1}'(x) - P_{n-1}'(x)\right).$$

b. Använd konforma avbildningen av vårt område till första kvartplanet $w = z^2$. Då transformeras ekvation till $\Delta v(w) = 0$, $w = \xi + i\eta$, $\xi, \eta > 0$ med randvillkoren $v = 1$, $0 < \xi < 4$, $\eta = 0$

$v = -1$, $\xi > 4$, $\eta = 0$, $\frac{\partial v}{\partial \xi}(0, \eta) = 0$, $\eta > 0$.

Fortsätter $v(w)$ som en jämn funktion av ξ till hela övre halvplanet $\eta > 0$. Då satisfierar v ekvationen

$\Delta v(w) = 0$, $v = 1$, $-4 < \xi < 4$; $\eta = 0$

$v = -1$ för $\xi < -4$ och för $\xi > 4$, $\eta = 0$

Det sista problemet lösas på vanliga sätt,

3. Randvillkoren är ohomogena, så krävs ett förberedelsesteg, $u = v + w$ där w satisfierar randvillkoren, vi tar, t.ex., $w = 2\sin\frac{x}{2}$.

Funktionen v satisfierar ekvationen

$$v_{tt} - 2v_t + 5v = v_{xx} - 10\sin\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}.$$

Efter det går lösningen på standart sätt. Dela variabler

$$v = T(t)X(x),$$

$$\frac{T'' - 2T' + 5T}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$$

$$X'(0) = 0, \quad X(\pi) = 0$$

Hittar egenvärden och egenfunktioner av problemet $X'' + \lambda X = 0$

osv.

4. Vi gör F - transform i x-led

$$-\xi^2 \hat{u}(\xi,y) + \hat{u}(\xi,y)_{yy} = 0$$

randvillkoren för $y=0$:

$$\hat{u}(\xi,0) = \widehat{\frac{x}{x^2+1}} = -i\pi e^{-|\xi|} \operatorname{sgn}\xi$$

~~randvillkoret för y~~

Vi söker en begränsad lösning (obegränsade har inte fysikalisk mening)

$$\hat{U}(\xi,y) = A(\xi)e^{-|\xi|y} + B(\xi)e^{|\xi|y}$$

Termen med $e^{|\xi|y}$ är inte begränsad bara $A(\xi)e^{-|\xi|y}$ finns kvar

Randvillkoret ger

$$\hat{U}(\xi,y) = -i\pi e^{-|\xi|-|\xi|y} \operatorname{sgn}\xi$$

För att hitta $U(x,y)$ gör den inversa F - transformation.

5. Enligt F-inversionsformeln,

$f(x) = \mathcal{F}^{-1}(F(\xi))$

$$F(\xi) = \begin{cases} 2\pi(1+\xi), & 0 < \xi < 2 \\ 0, & \xi < 0 \text{ eller } \xi > 2 \end{cases}$$

$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx$ beräknas med hjälp av Parseval

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i0x} dx = F(0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{2ix} dx = F(-2) \; \cancel{\text{[illegible]}}$$

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(x) e^{-3ix} dx$ parseval igen.

6. $u_{xx} + u_{yy} - u = 0$, $x \in (0,1)$, $y = (0,\pi)$

$u_y(x,0) = x(1-x)$, $u(x,y) = 0$ på andra delar av randen.

Randvillkoren i x-variabel är homogena, därför söker ~~...~~ lösningen som F-serie i x med koeff. som beror på y:

$$u(x,y) = \sum c_n(y) \sin \pi n x$$

koeff. $c_n(y)$ söks genom att sätta in i ekvationen och randvillkoren:

$$\sum \left(-\pi^2 n^2 c_n + c_n'' - c_n\right) \sin \pi n x = 0$$

$$c_n(\pi) = 0; \quad c_n(0) = \int_0^1 x(1-x) \sin n x \, dx$$