Hjälpmedel: Beta, Standard Math. Tables, typgodkänd räknedosa
Telefon: Micke Persson 0762-721860
2008–03-10 kl. 14.00–19.00

MATEMATIK
CHALMERS

Fourieranalys F2/Kf2, MVE030, 6 poäng; TMA132, 7,5 poäng

OBS! Ange namn, personnummer samt linje och inskrivningsår.

---

1. Hitta i formelsamlingen eller beräkna själv utvecklingen i trigonometriska F-serie för funktionen $f(\theta) = \sinh\theta$, $-\pi < \theta < \pi$. Med valet av ett passande värde av θ och/eller Parceval, beräkna summor $\sum(-1)^k \frac{2k-1}{(2k-1)^2+1}$, $\sum \frac{n^2}{(n^2+1)^2}$. Vilken utveckling får man med termvis integrering? Vad får man med hjälp av Parceval för den integrerade serie? Föreslå någon funktion $g(\theta)$ så att man kan termvis derivera serien för $f+g$ och hitta den deriverade serien.

2. Med hjälp av fouriermetoden hitta en lösning $u(r,\theta,z)$ av randvärdeproblem för Laplaceekvationen $\Delta u(r,\theta,z) = 0$ i cylindern $r < 2$, $0 < z < 2$ med randvillkoren $u(r,\theta,0) = xy$, $u(r,\theta,2) = 0$, $u_r(2,\theta,z) = 0$.

3. a) **MVE030**Hitta en begränsad lösning av värmeekvationen $u_t = 2u_{xx}$ för $t > 0, x > 0$ med randvillkoret $u(0,t) = 0$ och begynnelsevillkoret $u(0,x) = xe^{-x}$.

   b) **TMA132** Med hjälp av konforma avbildningar och symmetri hitta i området $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $0 < y < 2x$, den elektrostatiska potentialen u, $\Delta u = 0$, som är lika med 1 på x-axeln $y = 0$, $0 < x < 1$, lika med -1 för $y = 0$, $x > 1$, och som har normalderivatan 0 på linjen $y = 2x$.

4. Lös med hjälp av utvecklingen i Fourier serie i egenfunktioner av ett passande Sturm-Liouville problem ekvationen
$$u_{tt} + 4u = u_{xx} - u_x, 0 < x < \pi, t > 0$$
med randvillkoren $u_x(0,t) = 1, u(\pi,t) = -1$ och begynnelsevillkoren $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 0$.

5. Det finns två svarta lådor (tidsinvarianta linjära system) $\mathcal{A}$ och $\mathcal{B}$. Systemet $\mathcal{A}$ ger utsignalen $\frac{t}{(4+t^2)}$ för insignalen $\frac{1}{1+t^2}$. System $\mathcal{B}$ ger utsignalen te^{-2t^2} för insignalen $\frac{1}{4+t^2}$. Man skicker signalen $x(t) = 1, t \in (0,1); x(t) = 0, t \notin (0,1)$ till ingång av systemet $\mathcal{A}$ och svaret skicker till ingång av systemet $\mathcal{B}$. Vad får man på utgång av $\mathcal{B}$? Vad händer om man börjar med $\mathcal{B}$ i stället?

6. Lös ekvationen $u_{xx} + u_{yy} - u = 0$ i halvdisken $x^2 + y^2 < 1$, $x > 0$ med randvillkoren $u(x,0) = 1 - x^2, x \in (-1,1)$, $u = 0$ för $x^2 + y^2 = 1$.

7. a) **MVE030** Berätta så mycket du kan om Legendrepolynomen och tillämpningar.

   b) **TMA132** Berätta så mycket som du kan om problem i potentialteori som kommer från olika områden och relation med konforma avbildningar.

8. Bevisa och diskutera tillämpningar av satsen om den bästa approximationen. Ge ett exempel.

Varje uppgift kan ge max. 8 p. Skrivningen beräknas färdigrättas den 20. mars.

Fourier Analys. F2/KF2, MVE030, TMA132

Lösningar, 2008-03-10

1. Ta fourier serie för $f(\theta)$

$$\sinh\theta = f(\theta) = \frac{2\sinh\pi}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}k\sin k\theta}{k^2+1}$$

Välj $\theta = \frac{\pi}{2}$; endast udda $k = 2n-1$ finns kvar. ~~..~~ – hittar den första summan. ~~..~~ Den andra summan hittas med hjälp av Parceval

Integrering: $c_0 = 0$, kommer till serie

$$\cosh\theta = \frac{2\sinh\pi}{\pi}\sum\frac{(-1)^k\cos k\theta}{k^2+1}$$

intressanta resultat får man för $\theta = 0$, $\theta = \pi$. Termvis ~~..~~ derivering är omöjlig eftersom $f(\theta)$ inte är kontinuerlig! Man måste subtrahera $g(\theta) = \theta\sinh\pi/\pi$ $(-\pi<\theta<\pi)$, funktionen $f(\theta)-g(\theta)$ får man derivera samt dennes F-serie.

$$g(\theta) = 2\frac{\sinh\pi}{\pi}\sum\frac{(-1)^{k-1}\sin kx}{k}$$

$$f(\theta)-g(\theta) = \frac{2\sinh\pi}{\pi}\sum(-1)^{k-1}\left(\frac{k}{k^2+1}-\frac{1}{k}\right)\sin kx$$

$$= \frac{2\sinh\pi}{\pi}\sum(-1)^k\frac{1}{k(k^2+1)}\sin kx$$

och man kan derivera.

2. Skriver om problemet i polära koordinater

$u_{rr} + r^{-1} u_r + r^{-2} u_{\theta\theta} + u_{zz} = 0$

$u(r,\theta,0) = \frac{1}{2} r^2 \sin 2\theta$; $u_r(2,\theta,z) = 0$; $u(r,\theta,2) = 0$

Söker lösningen på formen

$u(r,\theta,z) = v(r,z) \sin 2\theta$. för $v(r,z)$ får vi problemet

$v_{rr} + r^{-1} v_r - 4 r^{-2} v + v_{zz} = 0$

$v(r,0) = \frac{1}{2} r^2$; $v_r(2,z) = 0$; $v(r,2) = 0$

Delar variabler $v(r,z) = R(r) Z(z)$,

$R'' Z + R' r^{-1} Z - 4 r^{-2} R Z + R Z'' = 0$

$\frac{R'' + r^{-1} R' - 4 r^{-2} R}{R} = -\frac{Z''}{Z} = -\mu^2$.

R-ekvationen har homogena randvillkor.

$R'' + r^{-1} R' - 4 r^{-2} R + \mu^2 R = 0$, Besselekvationen av ordningen $\nu = 2$. Sats 5.3 ; $b=2, \nu=2$

$R_k(r) = J_2\left(\lambda'_k \frac{r}{2}\right)$, λ'_k - positiva nollställen av J'_2. , $\mu_k^2 = \left(\frac{\lambda'_k}{2}\right)^2$

Z-ekvation: $Z''_k + Z_k \mu_k^2 = 0$

$Z_k = A_k \sinh \mu_k^2 z + B_k \cosh(\mu_k^2 z)$. A_k, B_k hittas ur randvillkoren , $z=0$; $z=2$.

$v(r,z) = \sum R_k(r) Z_k(z)$; för $z=0$:

$(r^2 D(r))$

3a. Betraktar udda fortsättningen av $u(x,t)$ i x variabel till negativa x, $u(-x,t) = -u(x,t)$ (udda – enligt randvillkoren)

för nya $u(x,t)$ har vi problemet

$u_t = 2u_{xx}$, $t>0$, $x \in R^1$, $u(x,0) = xe^{-|x|}$!

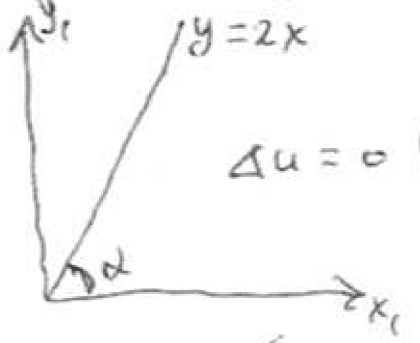
Fourie i x-led $U(\xi,0) = \mathcal{F}(xe^{-|x|})$ (hittar i tabellen).

$$U_t + 2\xi^2 U = 0;$$

$$U(\xi,t) = e^{-2\xi^2}\mathcal{F}(xe^{-|x|})$$

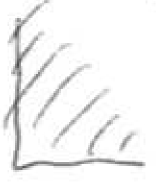
$$\Rightarrow u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-2\xi^2}\mathcal{F}(xe^{-|x|})\right)$$

$$= \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-2\xi^2}\right) * xe^{-|x|}.$$

3b. 

Vinkeln $\alpha = \arctan 2$

$\Delta u = 0$ (1) Transformation $z_1 = z^{\frac{\pi}{2\alpha}}$, vinkel transformeras

till 

randvillkoren: $u_x = 0$, $x_1 = 0$; $u = 1$, $0<x_1<1$; $u=0$, $x_1>1$

(2) gör jämna fortsättningen i x_1 variabel!

Löser $v(z_1) =$

[illegible] $+ C$

4. $u_{tt} + 4u = u_{xx} - u_x \quad , \; 0 < x < \pi \; , \; t > 0$

$u_x(0,t) = 1 \; , \; u(\pi,t) = -1 \; , \; u(x,0) = 0 \; ; \; u_t(x,0) =$

Randvillkoren är ohomogena. Förberedelsesteget krävs. Väljer

$v(x,t) = x - \pi + 1$. Sätter in i ekvationen $u = v + w$

$\Rightarrow$

$$W_{tt} + 4w + x - \pi + 1 = w_{xx} - w_x - 1$$

$$w(x,0) = -x + \pi - 1 \; , \; w_t(x,0) = 0$$

Delar variabler. $w = X(x)T(t)$

ekvationen

$$XT'' + 4XT = X''T - X'T$$

$$\frac{T''}{T} + 4 = \frac{X'' - X'}{X} = -\mu^2$$

$$X'' - X' + \mu^2 X = 0 \; , \; X'(0) = 0 , \; X(\pi) = 0$$

Ej Sturm-Liouville; transformerar till S-L formen

$$e^x\left(e^{-x}X'\right)' + \mu^2 X = 0 \; ; \; \left(e^{-x}X'\right)' + \mu^2 e^{-x} X =$$

$\Rightarrow$ viktfunktionen e^{-x}

Löser S-L problemet. kar. ekvationen

$$p^2 - p + \mu^2 = 0 \; ; \quad p = \frac{1}{2} \pm \sqrt{-\mu^2 + \frac{1}{4}}$$

lösningar endast för $-\mu^2 + \frac{1}{4} = -\beta^2$

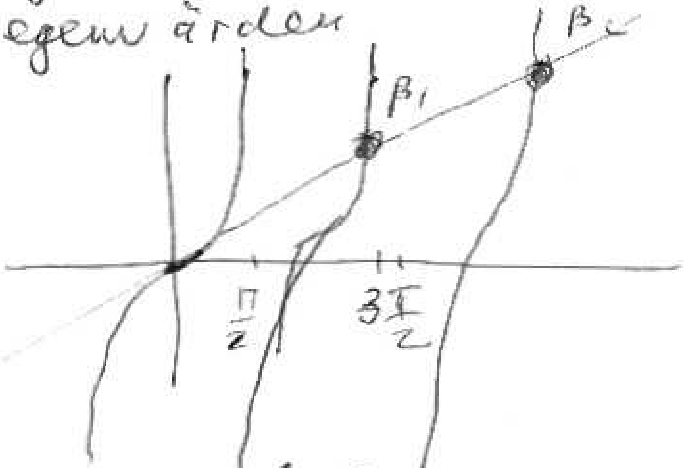
$$A \sin \beta\pi + B \cos \beta\pi = 0$$

$$B = -\frac{A}{2}\beta$$

$$\Rightarrow \sin \beta\pi - \frac{\beta}{2} \cos \beta\pi = 0$$

$$\boxed{\frac{\beta}{2} = \tan(\beta\pi)}$$

lösningar till den ekvationen – β_n – ger egenvärden



$$\mu_n^2 = \beta_n^2 + \frac{1}{4}$$

$$X_n(x) = A_n\left(e^{\frac{x}{2}} \sin \beta_n x - e^{\frac{x}{2}} \frac{\beta_n}{2} \cos \beta_n x\right)$$

A_n hittas ur normering

$$A_n = \frac{1}{\left(\int \left(e^{\frac{x}{2}} \sin \beta_n x - e^{\frac{x}{2}} \frac{\beta_n}{2} \cos \beta x\right)^2 e^{-x} dx\right)^{\frac{1}{2}}}$$

Söker lösningen på formen

$$u(x,t) = \sum X_n(x) T_n(t) \qquad (*)$$

Komplicerade fallet; ekvationen är

$$\sum \left(T_n'' X_n + 4 X_n T_n - X_n'' T_n + X_n' T_n\right) = \pi - x - 2$$

$$\sum \left(T_n'' + 4 T_n + \left(\tfrac{1}{4} + \beta_n^2\right) T_n\right) X_n = \pi - x - 2$$

mult. med $X_k \cdot e^{-x}$ och integrerar,

$$T_n'' + 4 T_n + \left(\tfrac{1}{4} + \beta_n^2\right) T_n = \frac{\langle \pi - x - 2, X_n \rangle}{\| X_n \|^2}$$

Löser ekvationen,

$T_n(0)$, $T_n'(0)$ hittar ur begynnelsevill

5. Systemet $\mathcal{A}$ har systemfunktionen och impulssvar

$h_{\mathcal{A}}(t)$; $\hat{h}_{\mathcal{A}}(\omega) = \dfrac{\mathcal{F}\left(\frac{t}{4+t^2}\right)}{\mathcal{F}\left(\frac{1}{1+t^2}\right)}$;

Systemet $\mathcal{A}$ har systemfunktion och impulssvaret

$h_{\mathcal{B}}(t)$; $\hat{h}_{\mathcal{B}}(\omega) = \dfrac{\mathcal{F}(t e^{-2t^2})}{\mathcal{F}\left(\frac{1}{4+t^2}\right)}$

När sygnalen $x(t)$ skickas på ingång av $\mathcal{A}$, transformeras den som

$y(t) = ((\mathcal{A}x)(t))$: $\widehat{\mathcal{A}x(t)}(\omega) = \hat{x}(\omega) \cdot \hat{h}_{\mathcal{A}}(\omega)$.

Om efter detta skickas $y(t)$ till $\mathcal{B}$, så transformeras $y(t)$ till $z(t)$,

$\hat{z}(\omega) = \hat{x}(\omega) \cdot \hat{h}_{\mathcal{A}}(\omega) \cdot \hat{h}_{\mathcal{B}}(\omega)$; $z(t)$ beräknas med hjälp av tabeller

Naturligtvis, blir resultatet oberoende av ordningen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$.

$u(r, 0) = \sum R(r) \Theta(0) = 1^{-1}$,

6. Problemet är av litet högre nivå, kräver litet mer tänkande. Föreslår 3 lösningsmetoder:

Lösning 1. I polära koordinater:

$$\boxed{\begin{array}{l} u_{rr} + r^{-1}u_r + r^{-2}u_{\theta\theta} - u = 0, \\ 0 < r < 1, \quad 0 < \theta < \pi \\ u(1,\theta) = 0; \quad u(r,0) = u(r,\pi) = 1 - r^2 \end{array}} \qquad (1)$$

separerar variabler, $u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$:

$$R''\Theta + r^{-1}R'\Theta + r^{-2}R\Theta'' - R\Theta = 0$$

$$\frac{r^2R'' + rR' - r^2R}{R} = -\frac{\Theta''}{\Theta} = -\mu^2 \qquad (2)$$

Löser R-ekvation

$$r^2R'' + rR' - r^2R + \mu^2R = 0, \quad R(1) = 1 \qquad (3)$$

Ekvation (3) är Besselekvation av ordning μ. Lösningen är $J_\mu(r)$. Vi måste välja sådana $\mu = \mu_n$, för vilka $J_{\mu_n}(1) = 0$, i andra ord, 1 är nollställe av J_{μ_n}. Normer av $R_n(r) = J_{\mu_n}(r)$ hittas i Sats 5.3.

Θ-ekvation:

Söker lösningen på formen

$$u(r,\theta) = \sum R_n(r)\Theta_n(\theta), \quad \Theta_n'' - \mu_n^2\Theta_n = 0;$$

$$u(r,0) = \sum R(r)\Theta(0) = 1 - r^2.$$

Lösning 2. Gör randvillkoren i θ homogena.
Sätter $u(r,\theta) = v(r,\theta) + 1 - r^2$

$$v_{rr} + r^{-1} v_r + r^{-2} v_{\theta\theta} - v = 5 - r^2 ;$$

$$v(1,\theta) = 0 ; \quad v(r,0) = v(r,\pi) = 0 .$$

Separerar variabler, som i lösningen 1:

$$r^2 R'' + rR' - r^2 R + \mu^2 R = 0 ; \quad R(0) = 0 ;$$

$$\Theta'' - \mu^2 \Theta = 0 \qquad \Theta(0) = \Theta(\pi) = 0 .$$

Löser Θ-ekvationen först. $\mu^2 = -n^2, n = 1, 2.$

$$\Theta_n(\theta) = \sin n\theta$$

~~Sätter in~~ i För R-ekv. - det komplicerade falle

Söker lösningen nu på formen

$$v(r,\theta) = \sum R_n(r) \sin n\theta$$

Sätter in i ekvationen:

$$\sum \left(r^2 R_n''(r) + r R_n' - r^2 R_n - n^2 R_n(r)\right) \sin n\theta = 5-1$$

multiplicerar med $\sin k\theta$, integrerar:

för $R_k(r)$ får ekvationen

$$r^2 R_k''(r) + r R_k'(r) - r^2 R_k - k^2 R_k(r)$$

$$= \frac{1}{\pi}(5 - r^2)\left(1 - (-1)^k\right) = c_k (5 - r^2) . \qquad (4$$

$$R_k(1) = 0 .$$

Ekvationen (4) - modifierade Bessel ekvation av ordningen k.

Lösningen $A_k I_k(r) + f_k(r)$

... partlösning av (4)

Lösning 3. Vi gör samma transformationer som i lösning 2. Introducerar en ny parameter σ och löser egenvärdeproblemet

$$\left.\begin{aligned} & v_{rr} + r^{-1} v_r + r^{-2} v_{\theta\theta} - v + \sigma v = 0 \\ & v(1,\theta) = 0;\ v(r,0) = v(r,\pi) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

(jämför med problemet av membranvibration i kap. 5).

Separerar variabler $v(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$

$r^2 R'' + rR' + (\sigma - 1) r^2 R + \mu^2 R = 0$, $R(1) = 0$

$\Theta'' - \mu^2 \Theta = 0$; $\Theta(0) = \Theta(\pi) = 0$.

Löser Θ ekvation:

$\Theta_k(\theta) = \sin k\theta$, $\mu_k^2 = -k^2$, $k = 1, 2, \ldots$

Sätter in i R-ekvation

$r^2 R'' + rR' + r^2(\sigma - 1)R - k^2 R = 0$, $R(1) = 0$

Besselekvationen av ordningen k.

Lösningar $\sigma - 1 = \lambda_{k,n}^2$, $\lambda_{k,n}$ - ~~ege~~ positiva nollställen av $J_k(\lambda)$.

$\sigma_{k,n} = \lambda_{k,n}^2 + 1$, $R_{k,n}(r) = J_k(\lambda_{k,n} r)$.

Söker lösningen av (1) på formen

$$v(r,\theta) = \sum_{k,n} C_{kn} \sin k\theta\, R_{kn}(r)$$

sätter in i (1):

$$\sum_{k,n} \sigma_{k,n} C_{kn} \sin(k\theta) R_{kn}(r) = 5 - r^2$$

koeff. C_{kn} hittas som vanligt genom multiplicering och integrering.