Hjälpmedel: Beta, Standard Math. Tables, typgodkänd räknedosa

MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola

Telefon: Fredrik Lindgren 0762-721860
2008–08-27 kl. 8.30–13.30

Fourieranalys F2/Kf2, MVE030, 6 poäng TMA132, 7,5 poäng

OBS! Ange namn, personnummer, kurskod samt linje och inskrivningsår.

---

1. För ett linjärt tidsinvariant system gäller att insignalen $x_1(t) = sign(t)e^{-|t|}$ ger upphov till utsignalen $y_1(t) = t\ sign(t)e^{-2|t|}$. Vad blir utsignalen $y(t)$, om insignalen $x(t)$ är 2π - periodisk funktion $x(t) = \pi - t$ för $0 < t < 2\pi$?? Ange svaret i form av en komplex trigonometrisk Fourierserie.

2. Lös randvärdeproblemet i sfäriska koordinater:$\Delta u(r, \theta, \phi) = r^{-1},\ 0 < a < r < b$ med randdata $u(a, \theta, \phi) = \cos\theta,\ u(b, \theta, \phi) = 1$.

3. a) **MVE030**Med hjälp av Fouriermetoden lös begynnelsevärdeproblemet

$$u_t + u = u_{xx},\ -\infty < x < \infty; t > 0$$
$$u(x, 0) = xe^{-x^2},\ -\infty < x < \infty.$$

   b) **TMA132** Med hjälp av konforma avbildningar och symmetri hitta i området $(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \ 0 < y < 3x$, den elektrostatiska potentialen u, $\Delta u = 0$, som är lika med 1 på x-axeln $y = 0,\ 0 < x < 1$, lika med -1 för $y = 0$, $x > 0$, och som har normalderivatan 0 på linjen $y = 3x$.

4. Funktionen $f(x)$ definieras som $f(x) = (2\pi)^{-1}\int_{-3}^{5} e^{ix\xi}(1+\xi^2)^{-1/2}d\xi$. Beräkna: $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2dx, \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(x)dx,\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(3x)dx,\ (f * f)(0)$.

5. Lös randvärdeproblemet för värmeledningsekvation:

$$u_t - u_{xx} = xe^t,\ 0 < x < \pi, t > 0;$$
$$u_x(0, t) = 1;\ u_x(\pi, t) = 0, t > 0;$$
$$u(x, 0) = 0,\ 0 < x < \pi.$$

6. Lös ekvationen $u_{xx} + 4u_{yy} - u = 0$ i rektangeln $x \in (0, 1), y \in (0, 2\pi)$ med randvillkoren $u_y(x, 0) = \sin(\pi x), x \in (0, 1),\ u = 0$ på resten av randen. Använd F-serie i något led.

7. a) **MVE030** Bevisa formeln för genererande funktion för Besselfunktioner. Berätta om tillämpningar.

   b) **TMA132** Berätta så mycket som du kan om platta flödeproblem i hydrodynamik och tillämpningar av konforma avbildningar för deras analyse.

8. Reguljära och singulära Sturm-Liouville problem. Beskrivning, exempel, huvudegenskaper. Egenskaper av egenfunktioner och egenvärden (ortogonalitet av egenfunktioner ska bevisas.)

Varje uppgift kan ge max. 8 p. Skrivningen beräknas färdigrättas den 12. sept.. Lösningsförslag publiceras på kursens webbsida den 30.aug.

MVE 030, Fourieranalyse F2/Kf2

20080827. Lösningar

1. Vi har $\hat{x}_1(\xi) = \frac{-2i\xi}{1+\xi^2}$, $\hat{y}_1(\xi) = 2\frac{4-\xi^2}{(4+\xi^2)^2}$.

$$\Rightarrow \hat{h}(\xi) = \frac{\hat{y}_1(\xi)}{\hat{x}_1(\xi)} = \frac{i}{\xi}\frac{(4-\xi^2)(1+\xi^2)}{(4+\xi^2)^2}$$

utvecklar $x(t)$ i komplexa F-serie:

$$x(t) = \pi - t = \sum c_n e^{int}$$

$$c_n = \frac{-i}{n}, \quad n \neq 0, \quad c_0 = 0.$$

Därför $e^{int} \rightarrow \hat{h}(n) e^{int}$,

$$x(t) \rightarrow y(t) = \sum \hat{h}(n) c_n e^{int}$$

2. Eftersom data är oberoende av φ, så söker vi lösningen oberoende av φ i sfäriska koordinater. Först söker vi θ-oberoende lösningen till ohomogena ekvationen $v(r)$

$$\Delta v = r^{-1}$$
$$v(a) = v(b) = 0$$

$$\Delta v = \frac{1}{r}; \quad r^{-2}(r^2 v_r)_r = \frac{1}{r},$$

$$r^2 v_r = \frac{r^2}{2} + C, \quad v = \frac{r}{2} - \frac{C}{r} + D$$

Konstanter C, D hittas ur randvillkoren.

$$C = -\frac{ab}{2}, \quad D = -\frac{a+b}{2}.$$

Nu söker vi lösningen till homogena ekvationen

$$\Delta w = 0; \quad w(a,\theta) = \cos\theta, \quad w(b,\theta) = 1$$

Variabelseparation leder till Legendreekvationen för θ:

$$w = \sum R_n(r)\, P_n(\cos\theta).$$

funktioner $R_n(r)$ hittas när vi sätter in w i ekvationen och randvillkoren. $r^{-2}(r^2 R_n'(r))' = n \cdot R_n(r)$

$$w(a,\theta) = \cos\theta = P_1(\cos\theta); \quad w(b,\theta) = 1 = P_0(\cos\theta)$$

$R_n(r) = A_n r^n + B_n r^{-n-1}$ Alla A_n, B_n, $n \neq 0, 1$ försvinner. $A_0 = \frac{b}{b-a}$, $B_0 = -\frac{ab}{b-a}$, $B_1 = \frac{a^2 b^3}{b^3 - a^3}$,

$$A_1 = -\frac{B_1}{b^3}.$$

3. Fouriertransformera i x-led.

$$\hat{u}_t = -\xi^2 \hat{u} - \hat{u}$$

Löser ordinär d.e. för $\hat{u}$

$$\hat{u}(\xi, t) = \hat{u}(\xi, 0)\, e^{-(\xi^2+1)t}.$$

för $t = 0$, $\hat{u}(\xi, 0) = \widehat{x e^{-x^2}}$

$$= i\sqrt{\pi}\left(-\frac{\xi}{2}\right) e^{-\xi^2/4}$$

$$\Rightarrow \hat{u}(\xi, t) = -i\sqrt{\pi}\,\frac{\xi}{2}\, e^{-\left(t + (t+\frac{1}{4})\xi^2\right)}.$$

Inversa F-transform ger lösningen

$$u(x,t) = \frac{x}{(4t+1)^{3/2}}\, e^{-t}\, e^{-\frac{x^2}{4t+1}}.$$

4. $f(x) = \mathcal{F}^{-1}(F(\xi))$

där F är F-transf. för f.

~~$f(x) = \mathcal{F}^{-1}$~~ I vårt fall

$$F(\xi) = (1+\xi^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad \xi \in (-3,5)$$

$$F(\xi) = 0, \quad \xi \notin (-3,5)$$

Parseval: $\int |f|^2 dx = (2\pi)^{-1} \int |F(\xi)|^2 d\xi$

$$= (2\pi)^{-1} \int_{-3}^{5} (1+\xi^2)^{-1} d\xi;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-i \cdot 0 \cdot x} dx = F(0);$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos ax\,dx = \frac{1}{2}\Big(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{iax}\,dx + \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{-iax}\,dx\Big).$$

för $a \neq -3, 3$, $a \neq 5, -5$ detta $= \frac{1}{2}(F(a)+F(-a))$

för speciella värden av a, måste man komma ihåg att $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{iax}\,dx$

$$= \frac{F(a+0) + F(a-0)}{2}.$$

5. Randvillkoren är ohomogena. Därför ~~f~~ gör vi förberedelsesteg, väljer $v(x,t)$ som satisfierar randvillkoren, t.ex. $v(x,t) = \sin\frac{x}{2}$. Söker $u = v + w$, w satisfierar problemet

$$w_t - w_{xx} = xe^t - \frac{1}{4}\sin\frac{x}{2}$$

$$w_x(0,t) = w_x(\pi,t) = 0; \quad w(x,0) = -\sin\frac{x}{2}$$

Det problemet lösas på vanliga sättet. $w = X(x)T(t)$. X-ekvationen ger

$$X_n(x) = \cos nx, \quad n = 0, 1, \dots$$

~~Sätter~~ Söker lösningen på formen

$$w(x,t) = \sum_{0}^{\infty} X_n(x)T_n(t),$$

sätter in i ekvationen och begynnelsevillkoren och hittar T_n.

6. Separerar variabler:

$$u(x,y) = X(x)\,Y(y)$$

$$\frac{X''}{X} + 4\frac{Y''}{Y} - 1 = 0$$

$$\frac{X''}{X} = 1 - 4\frac{Y''}{Y} = -\mu.$$

Eftersom randvillkoren i x variabel är homogena, väljer vi X-ekvation som S-L problemet.

$X_n(x) = \sin n\pi x$. Efter detta söker vi lösningen

$$u(x,y) = \sum Y_n(y)\sin n\pi x.$$

Ekvationen och randvillkoren för Y_n hittas ur ekv. och randvillkoren för u.