

Fourieranalys F2/Kf2, MVE030, 6 poäng; TMA132, 7,5 poäng

OBS! Ange namn, personnummer samt linje och inskrivningsår.

1. Hitta i formelsamlingen eller beräkna själv utvecklingen i trigonometriska F-serie för 2π -periodiska funktionen $f(\theta) = |\theta|$, $-\pi < \theta < \pi$. Med valet av ett passande värde av θ och/eller Parseval, beräkna summor $\sum (-1)^n (2n-1)^{-2}$, $\sum (2n-1)^{-2}$, $\sum (2n-1)^{-4}$. Vilken utveckling får man med termvis integrering? Vad får man med hjälp av Parseval för den integrerade serien? Utveckla densamma funktionen i F-serie på intervallet $(-2\pi, 2\pi)$.
2. Med hjälp av fouriermetoden hitta en lösning $u(r, \theta, z)$ av randvärdeproblem för Laplaceekvationen $\Delta u(r, \theta, z) = 0$ i cylindern $r < 1$, $0 < z < 2$ med randvillkoren $u(r, \theta, 0) = x^2 y^2$, $u(r, \theta, 2) = 0$, $u_r(1, \theta, z) = 0$.

3. a) **MVE030** Bestäm (med hjälp av Fouriertransform) en begränsad lösning till problemet

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad -\infty < x < \infty, y > 0 \quad u(x, 0) = \frac{x}{x^2 - 2x + 5}.$$

- b) **TMA132** Med hjälp av konforma avbildningar och symmetri hitta i området $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $0 < y < x$, den elektrostatiske potentialen u , $\Delta u = 0$, som är lika med 1 på x -axeln $y = 0$, $0 < x < 4$, lika med -1 för $y = 0$, $x > 4$, och som har normalderivatan 0 på linjen $y = x$.

4. Lös med hjälp av utvecklingen i Fourier serie i egenfunktioner av ett passande Sturm-Liouville problem ekvationen

$$u_{tt} + 4u = u_{xx} + 2u_x, \quad 0 < x < \pi, t > 0$$

med randvillkoren $u_x(0, t) = 1$, $u_x(\pi, t) = -1$ och begynnelsevillkoren $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = 0$.

5. Den styckvis glatta funktionen $f(x)$ har Fouriertransformationen $\hat{f}(\xi) = \int_{-2}^2 \cos(\xi x) \frac{e^x}{1+x^2} dx$. Beräkna $\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) \cos(\xi) d\xi$, $\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) \cos(2\xi) d\xi$, $\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi$.

6. Bestäm en lösning till problemet

$$x u_{xx} + (1-x) u_x = u_t, \quad 0 < x < \infty, t > 0,$$

$u(x, t)$ begränsad då $x \rightarrow 0$, $u(x, 0) = e^{-x}$.

Ledning: Laguerrepolynomen $L_n(x)$ satisfierar ekvationen $x L_n'' + (1-x) L_n' + n L_n = 0$. Gör en lämplig ansatz. Glöm inte om vikten.

7. a) **MVE030** Berätta så mycket du kan om Legendrepolynomen och tillämpningar.

- b) **TMA132** Berätta så mycket som du kan om problem i potentialteori som kommer från olika områden och relation med konforma avbildningar.

8. Berätta om samplingsatsen: beviset och tillämpningar.

Varje uppgift kan ge max. 8 p. Skrivningen beräknas färdiggrättas den 25. januari.

Fourieranalys F2-KF2, MVE030

Tenta 2009-01-16

Lösningförslag

1. F-serie för $f(\theta)$ på $(-\pi, \pi)$ ges i tabellen:

Folland, s. 26, 2. $f(\theta) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum \frac{\cos(2n-1)\theta}{(2n-1)^2}$

funktionen är styckvis glatt och kontinuerlig, så serien konvergerar mot $f(\theta)$ för alla θ .

Sätter $\theta=0$: $0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum \frac{1}{(2n-1)^2}$. Att f_0 summan $\sum (-1)^n (2n-1)^2$ går inte. Plancherel:

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} \sum \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)^2 d\theta$$

F-serie går att derivera

$$f'(\theta) = \text{sign } \theta = \begin{cases} 1, & \theta \in (0, \pi) \\ -1, & \theta \in (-\pi, 0) \end{cases}$$

$$\text{sign } \theta = \frac{4}{\pi} \sum \frac{-\sin(2n-1)\theta}{(2n-1)} \quad \theta \neq -\pi, 0, \pi$$

på intervallet $(-2\pi, 2\pi)$

$$f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos n\theta/2$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta/2 d\theta$$

2. I cylindriska koordinater

$$u_{rr} + r^{-1}u_r + r^{-2}u_{\theta\theta} + u_{zz} = 0.$$

$$u(r, \theta, 0) = x^2 y^2 = \frac{1}{8} r^4 (1 - \cos 4\theta)$$

$$u(r, \theta, z) = 0$$

$$u_r(1, \theta, z) = 0$$

Söker lösningen på formen

$$u(r, \theta, z) = u_1(r, z) + u_2(r, z) \cos 4\theta$$

$$u_1: u_{1rr} + r^{-1}u_{1r} + u_{1zz} = 0$$

$$u_1(r, 0) = \frac{1}{8} r^4; u_1(r, z) = 0; u_{1r}(1, z) = 0$$

$$u_2: u_{2rr} + r^{-1}u_{2r} - 4^2 r^{-2}u_2 + u_{2zz} = 0$$

$$u_2(r, 0) = -\frac{1}{8} r^4, u_2(r, z) = 0, u_{2r}(1, z) = 0$$

Löser problem för u_1, u_2 separat. T.ex., för $u_2(r, z)$. Söker separerade lösningar

$$u_2(r, z) = R(r) Z(z)$$

$$\frac{R'' + r^{-1}R' - 4^2 r^{-2}R}{R} = -\frac{Z''}{Z} = -\lambda^2$$

R-lösningen till Besselkvationen

$$R'' + r^{-1}R' - 4r^{-2}R + \lambda^2 R = 0$$

R uttrycks på vanliga sätt genom Besselfunktioner av ordningen 4

$$R_n(r) = J_{\frac{4}{4}}(\lambda_n r) \quad \text{där}$$

λ_n - nollställen av derivatan $J_4'(\lambda)$

$$z_n'' = \lambda_n^2 z_n$$

$$z_n(2) = 0 \Rightarrow z_n = A_n \sinh(\lambda_n(z-2))$$

$$u_2(r, z) = \sum A_n \sinh(\lambda_n(z-2)) J_4(\lambda_n r)$$

A_n hittas ur randvillkoret

$$u_2(r, 0) = -\frac{1}{8} r^4$$

$$\sum A_n \sinh(\lambda_n(-2)) J_4(\lambda_n r) = -\frac{1}{8} r^4$$

multiplierar med $J_4(\lambda_k r) \cdot r$
och integrerar — hittar A_n .

På liknande sätt söker dellösningen $u_1(r, z)$
Då blir Besselfunctioner $J_0(\mu_k r)$
inblandade.

3.9. $u_{xx} + u_{yy} = 0$, $-\infty < x < \infty$, $y > 0$

$u(x, 0) = \frac{x}{x^2 - 2x + 5}$ En begränsad lösning söks

F. transformerar i x :

$$U(\xi, y) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, y) e^{-i\xi x} dx.$$

$U(\xi, y)$ satisfierar ekvationen

$$-\xi^2 U(\xi, y) + \frac{\partial U(\xi, y)}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$U(\xi, 0) = \mathcal{F} \left[\frac{x}{x^2 - 2x + 5} \right]$$

$$= \mathcal{F} \left[\frac{x-1+1}{(x-1)^2 + 2^2} \right]$$

$$= \mathcal{F} \left[\frac{x-1}{(x-1)^2 + 2^2} \right] + \mathcal{F} \left[\frac{1}{(x-1)^2 + 2^2} \right]$$

$$= e^{-i\xi} \pi \operatorname{sgn} \xi e^{-2|\xi|} + \frac{\pi}{2} e^{-2|\xi|} = \varphi(\xi)$$

lösningen till (1) har formen

$$U(\xi, y) = A(\xi) e^{-2|\xi|y} + B(\xi) e^{2|\xi|y}$$

Villkoret att U är begränsad leder till $B(\xi) = 0$. $A(\xi)$ hittas ur randvillkoret

$$A(\xi) = U(\xi, 0) = \varphi(\xi)$$

$$U(\xi, y) = \varphi(\xi) e^{-2|\xi|y}$$

$$u(x, y) = \mathcal{F}^{-1} \left[\varphi(\xi) e^{-2|\xi|y} \right]$$

3b. steg 1. Vi gör konforma avbildningen
 $w = z^2$. Med detta transformerar
 problemet till kvarten $\arg w \in (0, \frac{\pi}{2})$
 med randvillkoren $u(x, 0) = 1, 0 < x < 16$
 $u(x, 0) = -1, x > 16$, normalderivatan
 $= 0$ på y -axeln.

steg 2 Vi fortsätter u till den andra
 kvarten $\arg w \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ som en
 jämn funktion av x . Vi kommer till
 problemet i halvplanet

$$\Delta u = 0, \quad y > 0$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} -1, & x < -16 \\ 1, & -16 < x < 16 \\ -1, & x > 16 \end{cases}$$

Det problemet lösas på ~~eff~~vanligt
 sätt och slutligen används den
 inversa konforma avbildningen.

4. Separerar variabler:

$$u = X(x)T(t)$$

$$\frac{T'' + 4T}{T} = \frac{X'' + 2X'}{X} = -\lambda^2$$

$$X'' + 2X' + \lambda^2 X = 0$$

transformerar till ett standard S-L problem

$$e^{-2x} (e^{2x} X')' + \lambda^2 X = 0$$

$$(e^{2x} X')' + e^{2x} \lambda^2 X = 0 \quad (2)$$

⇒ viktfunctionen e^{2x} .

Förberedelsesteget krävs eftersom randvillk. är icke-homogena.

$$u = v + w, \quad v(x) = \sin x \text{ satisf. randvillk.}$$

$$W: \quad W_{xx} + 2w_x - w_{tt} - 4w = +\sin x - 2\cos x - 4\sin x$$

$$\boxed{W(0,t) = W_x(\pi,t) = 0, \quad W(x,0) = -\sin x, \quad (3)$$
$$W_t(x,0) = 0$$

Löser egenvärdeproblemet (2) med randvillkoren $X''(0) = X'(\pi) = 0$

$$\text{Karakt. ekv. } p^2 + 2p + \lambda^2 = 0$$

$$p^2 + 2p + 1 = 1 - \lambda^2$$

$$(p+1)^2 = 1 - \lambda^2$$

$$p+1 = \pm \sqrt{1 - \lambda^2}$$

$$p = -1 \pm \sqrt{1 - \lambda^2}$$

Värdena av ρ och av λ
hittas ur randvillkoren.

Allmänna lösningen.

$$X(x) = A e^{-x + \sqrt{1-\lambda^2}x} + B e^{-x - \sqrt{1-\lambda^2}x}$$

$$X'(0) = X'(\pi l) = 0$$

På ett vanligt sätt hittar

$$X_n, \lambda_n$$

Efter detta söker

$$w(x,t) = \sum T_n(t) X_n(x)$$

sätter in i ekvationen (3)

och får ekvationerna för $T_n(t)$.

$T_n(0)$ hittas ur begynnelsevillkoren.

Vid integreringen glöm inte om vikten!

5. Funktionen $\hat{f}(\xi)$ är cos-

F-transformations av

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{1+x^2} + \frac{e^{-x}}{1+x^2} & 0 < x < 2 \\ 0 & x > 2 \end{cases}$$

Enligt inversionssatsen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) \cos \xi x d\xi = \begin{cases} f(x) & \text{f\u00e4r kontin. i } x \\ \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} & \text{f\u00e4r icke-kontin. i } x \end{cases}$$

$x=1$ - kontinuerlig

$x=2$ - icke-kontin.

$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi$ hittas med hj\u00e4lp
av Plancherel

6. Separerar variabler i
equationen

$$u = X(x) T(t)$$

$$\frac{x X_{xx} + (1-x) X_x}{X} = \frac{T'}{T} = -\lambda$$

$$x X_{xx} + (1-x) X_x + \lambda X = 0$$

$$x \in (0, \infty), \quad |$$

Egenfunktioner

$X_n(x) = L_n(x)$ - Laguerre polynom.

De är ortogonala på $(0, \infty)$ med
vikten e^{-x} ; egenvärden är $\lambda_n = n$

Lösningen $u(x, t)$ söks som

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) e^{-nt} \cdot A_n$$

A_n söks ut begynnelsevillkor

$$u(x, 0) = \sum L_n(x) A_n = e^{-x}$$

$$A_n = \int_0^{\infty} e^{-x} L_n(x) \cdot e^{-x} dx.$$