Hjälpmedel: Beta, Standard Math. Tables, typgodkänd räknedosa
MATEMATIK Telefon: Marcus Warfheimer 0762-721860
Chalmers tekniska högskola 2009–03–13 kl. 08.30–13.30, 5 timmar

Fourieranalys F2/Kf2, MVE030, 6 poäng

OBS! Ange kod, kurskod samt linje.

---

1. Bestäm det polynom $P(x)$ av högst tredje graden som minimerar
$$\int_0^\infty (e^{-2x} - P(x))^2 x e^{-x} dx.$$

2. Funktionen $f(t)$ har Fouriertransformation $\hat{f}(\omega)$, där
$$\hat{f}(\omega) = 0, |\omega| < 1,\ \hat{f}(\omega) = 1, 1 < |\omega| < 4,\ \hat{f}(\omega) = \omega^{-1}, |\omega| \geq 4.$$
För $\alpha > 0$ definieras funktionen $g_\alpha(t)$ som $\frac{\sin(\alpha t)}{\pi t}$. Beräkna $\int_{-\infty}^{\infty} |(g_\alpha * f)(t)|^2 dt$, $\int_{-\infty}^{\infty} |(g_\alpha * f * f)(t)|^2 dt$ och $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos t dt$.

3. Hitta en begränsad lösning till värmeekvationen $u_t = u_{xx}$ för $0 < x$, $0 < t$, med randvillkoren $u(0,t) = \sin(2t)e^{-t}$ och begynnelsevillkoren $u(x,0) = \sin(x)$. Komplicerade integraler behövs inte att räkna. `Led: Välj mellan Laplace- och Fouriertransformation.`

4. Lös ekvationen $\Delta u + u = 0$ i cylinder $r < 1$, $z \in (0,1)$ (i cylindriska koordinater r, θ, z) med randvilllkoren $u_z(r,\theta,0) = 0$, $u(r,\theta,1) = 0$ och $u(1,\theta,z) = 1 - z^2$.

5. Betrakta diffusionsekvation $u_t = ((1-x^2)u_x)_x$, $x \in (-1,1)$ med begynnelsevillkoren $u(x,0) = f(x)$ där $f(x) = x^2, x > 0; f(x) = 0, x \leq 0$. (Problemet beskriver diffusion i en icke-homogen substans.) Vilka randvillkor måste man sätta i punkterna ± 1? Hitta lösningen på formen av en serie i passande ortogonala funktioner och beräkna koefficienter. `Led: Använd några av ortogonala polynomsystem.`

6. Lös vågekvation $u_{tt} = \Delta u$ i disken $r < 1$, med randvillkoren $u(1,\theta,t) = \sin(\theta)$ och begynnelsevillkoren $u(r,\theta,0) = 0, u_t(r,\theta,0) = 0$. `Led: Sök lösningen med något bestämt beroende på` θ.

7. Berätta om regler för integrering och derivering av Fourierserier. Ge bevis och exempel. Var tilämpas reglerna?

8. Berätta så mycket som du kan om dynamiska system, deras karakteristiker, egenskaper, och typiska problem för sådana system.

Varje uppgift kan ge max. 8 p. Skrivningen beräknas färdigrättas den 25. mars. Lösningsförslag publiceras på kursens webbsida 20.mars. Om granskningen se info på kursens webbsida.
Lycka till. **Grigori Rozenblioum**

Fourieranalys MVE030
2009-03-13 Lösningar

1. Intervallet $(0,\infty)$ och vikten $w(x) = xe^{-x}$ hänvisar på Laguerrepolyn. L_n^1. Så, ges bästa approximation av

$$P = c_0 L_0^1 + c_1 L_1^1 + c_2 L_2^1 + c_3 L_3^1$$

där $$c_n = \frac{\langle e^{-2x}, L_n^1 \rangle_w}{\| L_n^1 \|_w^2}.$$

Täljaren beräknas som vi gjorde på övningen, 6.5:6, nämnaren tas ur Beta eller Folland, $\| L_n^1 \|_w^2$

$$= \frac{\Gamma(n+2)}{n!} = n+1.$$

2 Enligt Parseval och faltningformel,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g_\alpha * f(t)|^2\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{g}_\alpha(\omega)\hat{f}(\omega)|^2 d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega$$

beräknas direkt, resultat har olika formen för $\alpha \le 1$, $\alpha \in [1, 4]$ och $\alpha > 4$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g_\alpha * f(t) * f(t)|^2\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{g}_\alpha(\omega) \hat{f}(\omega) \hat{f}(\omega)|^2 d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} |\hat{f}(\omega)|^4 d\omega.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos t\, dt = \frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{it} dt + \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-it} dt\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\hat{f}(1) + \hat{f}(-1)\right].$$ Dessa värden är ej angivna i villkor, så använder man inversionssatsen för $\hat{f}$ som säger att integraler ovan konvergerar mot $\dfrac{\hat{f}(\pm 1+0) + \hat{f}(\pm 1-0)}{2}$.

3. Vi gör Laplacetransform i t-~~led~~ (alla andra gör fel). För $V(x,s) = \mathcal{L}u(x,t)$, får vi problemet

$$sV(x,s) - \sin x = V_{xx}$$

$$V(0,s) = \mathcal{L}(\sin(2t)e^{-t}) = \frac{2}{(s+1)^2+4}$$

Löser x-ekvation. Homogena lösningen:

$$V_h = Ae^{\sqrt{s}x} + Be^{-\sqrt{s}x}$$

Väljer $-\sqrt{s}$, om $\sqrt{s}$ betyder gren av s med $\operatorname{Re}\sqrt{s} > 0$, för att garantera att V blir begränsad. Partikulära lösningen blir $U_p(x,s) = \frac{\sin x}{s+1}$

så $V(x,s) = B(s)e^{-\sqrt{s}x} + \frac{\sin x}{s+1}$

B(s) hittas ur randvillk. x=0

$$V(0,s) = B(s) = \frac{2}{(s+1)^2+4}$$

$$V(x,s) = \frac{2}{(s+1)^2+4}e^{-\sqrt{s}x} + \frac{\sin x}{s+1}$$

Inverterar: och använder faltningen

$$V(x,t) = \frac{x}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-\tau}\sin 2\tau\,(t-\tau)^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{x^2}{4(t-\tau)}}\,d\tau - \sin x\, e^{-t}$$

4. Söker lösningen oberoende av θ.

Förberedelsesteget krävs inte eftersom z-led har homogena randvillkor. Separerar variabler!

$$\frac{R'' + r^{-1} R'}{R} = -\frac{Z'' + Z}{Z} = \mu^2$$

Löser Z-problemet

$$Z'' + (\mu^2 + 1) Z = 0 \quad ; \quad Z(0) = Z(1) = 0$$

Egenvärden $\mu_n^2 + 1 = (n\pi)^2$, $Z(z) = \sin(n\pi z)$

Löser R-ekv.

$$R_n'' + r^{-1} R_n' - (\mu_n^2) R_n = 0$$

Modifierade Besselekvation ordn. 0

Lösningar $R_n = A_n I_0(\mu_n r) + B_n K_0(\mu_n r)$

K_0 ingår inte eftersom lösningen måste vara begränsad i 0.

So, $U(r, z) = \sum A_n I_0(\mu_n r) \sin(n\pi z)$

A_n söks ur randvillkor

$$U(1, z) = \sum A_n I_0(\mu_n) \sin(n\pi z) = 1 - z^2$$

multiplicerar med $\sin(k\pi z)$ och integrerar:

$$A_k I_0(\mu_k) \cdot \frac{1}{2} = \int_0^1 (1 - z^2) \sin(k\pi z) dz$$

5. $u_t = [(1-x^2)u_x]_x$

I punkter $x = \pm 1$ försvinner koefficienten $(1-x^2)$. I sådana punkter, där problemet är singul., sätter man randvillkoren: $u(\pm 1, t)$ ändlig.

Separerar variabler

$$\frac{T'}{T} = \frac{\left((1-x^2)X'\right)'}{X} = -\mu^2.$$

X-ekvationen är Legendre

Egenfunktioner $P_n(x)$, egenvärden $\mu^2 = n(n+1)$.

Lösningen $u(x,t)$ söks som

$$u(x,t) = \sum T_n(t) P_n(x) \; ; \; T_n' + \mu_n^2 T_n = 0$$

$T_n(0)$ söks ur begynnelsevillkor

$$T_n(0) = \frac{\int_0^1 x^2 P_n(x)\,dx}{\|P_n(x)\|^2}$$

nämnaren $= \frac{2}{2n+1}$, täljaren beräknas med hjälp av formeln $P_n = \frac{1}{2n+1}\left(P_{n+1}' - P_{n-1}'\right)$

och partiellintegrering, som i Folland, 6.2: 7, 8.

6. ~~[illegible]~~ separeras θ-beroende. Söker lösningen på formen

$$u(r,\theta,t) = v(r,t)\sin\theta$$

kommer till

$$v_{tt} = v_{rr} + r^{-1}v_r - r^{-2}v$$

$$v(r,0) = 0,\quad v_t(r,0) = 0,\quad v(1,t) = 1.$$

Förberedelsesteget krävs, söker

$$v(r,t) = r + w(r,t)$$

(några försökte med $1 + w(r,t)$, men det leder till hårda beräkningar)

w satisfierar problemen

$$w_{tt} = w_{rr} + r^{-1}w_r - r^{-2}w$$

$$w(r,0) = r,\quad w_t(r,0) = 0,\quad w(1,t) = 0$$

separeras variabler

$$\frac{T''}{T} = \frac{R'' + r^{-1}R' - r^{-2}R}{R} = -\mu^2$$

R-ekvation är Bessel, ordning 1

Egenvärden μ_n, nollställen av $J_1(x)$

egenfunktioner $R_n(r) = J_1(\mu_n r)$

Lösningen söks som $u(r,t) = \sum T_n(t) R_n(r)$

för $T_n(t)$ har ekvationen $T_n'' + \mu_n^2 T = 0$,

$T_n = A_n \sin \mu_n t + B_n \cos \mu_n t$. A_n, B_n hittas ur begynnelsevillk. $A_n = 0$,

$$B_n = \frac{\int_0^1 r^2 J_1(\mu_n r)\,dr}{\|J_1(\mu_n r)\|^2}.$$