Hjälpmedel: Beta, Standard Math. Tables, typgodkänd räknedosa
MATEMATIK Telefon: David Witt Nyström 0762-721860
Chalmers tekniska högskola 2009–08-27 kl. 08.30–13.30

Fourieranalys F2/Kf2, MVE030, 6 poäng

OBS! Ange kod, kurskod samt linje

OBS! Ange kod, kurskod samt linje.

1. Hitta i formelsamlingen eller beräkna själv utvecklingen i trigonometriska F-serie för funktionen $f(\theta) = 0$, $-\pi < \theta < 0$; $f(\theta) = \theta$, $0 \le \theta \le \pi$. Med valet av ett passande värde av θ och/eller Parceval, beräkna summan $\sum \frac{1}{(2n-1)^2}$. Vilken summa får man om man sätter $\theta = \pi/2$ i serien? Vilken utveckling får man med termvis integrering? Vad får man med hjälp av Parceval till den integrerade serie? Föreslå något funktion $g(\theta)$ så att man kan termvis derivera serien för $f + g$ och hitta suman till den deriverade serien.

2. Med hjälp av fouriermetoden hitta en lösning $u(r, \theta, z)$ av randvärdeproblem för Laplaceekvationen $\Delta u(r, \theta, z) = 0$ i cylindern $r < 5$, $0 \le z < 5$ bivillkoren $u(r, \theta, 0) = x^2 - y^2$, $u(r, \theta, 5) = 0$. **Tips: Framstäl $x^2 - y^2$ i polära koordinater sök lösningen på speciella formen med θ- beroende separerat**, $u(r, \theta, z) = v(r, z)h(\theta)$ med en anpassad funktion h

3. Bestäm ett polynom $Q(x)$ av högst tredje graden som minimerar
$$\int_{-\infty}^{\infty} (Q(x) - e^x)^2 e^{-x^2} dx.$$

4. Lös med hjälp av utvecklingen i Fourier serie i egenfunktioner av ett passande Sturm-Liouville problem ekvationen
$$u_{tt} + 4u = u_{xx} - u_x, 0 < x < \pi, t > 0$$
med randvillkoren $u_x(0, t) = 1, u(\pi, t) = -1$ och begynnelsevillkoren $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = 0$.

5. Funktionen $f(t)$ har Fouriertransformen $\hat{f}(\omega) = \frac{\omega\theta(\omega)}{(1+\omega^2)^2}$ där $\theta(\omega)$ är Heavisides funktion. Beräkna $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-|2t|}\mathrm{sgn}\, t dt$, $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$, $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(3t)dt$.

6. Lös ekvationen $u_{xx} + u_{yy} - 4u = 0$ i rektangeln $x \in (0, \pi), y \in (0, 2\pi)$ med randvillkoren $u(x, 2\pi) = x(\pi - x), x \in (0, \pi)$, $u = 0$ på resten av randen. Använd F-serie i något led.

7. Formulera och konvergenssatsen för trigonometriska fourierserier. Bevisa satsen för fallet kontinuerliga funktionen.

8. Berätta så mycket som du kan om samplingsprocessen, samplingsteorem och tillämpningar.

Varje uppgift kan ge max. 8 p. Skrivningen beräknas färdigrättas den 12. september. Lösningsförslag publiceras på kursens webbsida 29.aug.

Fourieranalys F2/Kf2
Tenta 20090827 lösningar.

1. F-koefficienter beräknar direkt eller hittar i Beta:

$$f(\theta) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_1^\infty \frac{\cos(2n-1)\theta}{(2n-1)^2} + \sum_1^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin n\theta$$

sätter $\theta=0$. f är kontin. i den punkten.

$$0 = f(0) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_1^\infty \frac{1}{(2n-1)^2}$$

så, $\sum_1^\infty \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

sätter $\theta=\frac{\pi}{2}$, f är kontin. $\cos(2n-1)\frac{\pi}{2}=0$

$$\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & n \text{ jämn} \\ 1, & n = 4k+1 \\ -1, & n=4k+3 \end{cases}$$

$$0 = \frac{\pi}{4} + \sum \frac{(-1)^m}{(2m-1)}.$$

~~Planche~~ I punkten $\theta=\pi$ är funktionen icke-kontin.

$$\frac{f(\pi+0)+f(\pi-0)}{2} = \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{(2n-1)^2}$$

Plancherel: $\int_0^\pi \theta^2 d\theta = \frac{\pi^3}{3} = 2\pi\left[\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum\frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{1}{2}\sum\frac{1}{n^2}\right]$

Integreringen är alltid möjlig

$$F(\theta) = \begin{cases} 0, & \theta<0 \\ \frac{\theta^2}{2}, & \theta\geq 0 \end{cases}$$

$$F(\theta) = C_0 + \frac{\pi}{4}\theta - \frac{2}{\pi}\sum \frac{\sin(2n-1)\theta}{(2n-1)^3} - \sum_1^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos n\theta$$

Derivering kräver kontinuitet.
Man kan ta $g(\theta) = \begin{cases} -\theta, & \theta\in[-\pi,0) \\ 0, & \theta\in(0,\pi] \end{cases}$.

$f+g$ kan man derivera

2. Söker lösningen på formen

$u(r,\theta,z) = v(r,z)\cos 2\theta$. Sätter in i ekvationen och förkortar med $\cos 2\theta$: för v får problemet

$$v_{rr} + \frac{1}{r} v_r - \frac{4}{r^2} v + v_{zz} = 0$$

med randvillkor $\quad v(r,0) = r^2$

$\quad v(r,5) = 0$

Separera variabler, $v(r,z) = R(r)\,Z(z)$

$$\frac{R_{rr} + \frac{1}{r} R_r - \frac{4}{r^2} R}{R} + \frac{Z_{zz}}{Z} = 0$$

$$R_{rr} + \frac{1}{r} R_r - \frac{4}{r^2} R + \mu^2 R = 0\,; \quad Z_{zz} - \mu^2 Z = 0$$

R-ekvationen är Bessel av ordningen 2

Lösningen $\quad R_n = J_2(\mu r)$

Väljes randvillkoren på $r = 5$, t.ex. $R(5) = 0$

då: $R_n(r) = J_2\left(\frac{\lambda_n}{5} r\right)$, λ_n - nollställen av J_2

Söker lösningen $v(r,z)$ på formen

$$v(r,z) = \sum R_n(r)\,Z_n(z)$$

$Z_n(z)$ löser z-ekvationen ovan, $Z_n(z) = A_n \cosh \mu_n z + B_n \sinh \mu_n z$. A_n, B_n hittas ur randvillkoren för $z = 0$ och $z = 5$

3. Intervall och vikten påpekar på Hermitepolynom $H_n(x)$

Utvecklar $Q(x) = \sum_{n=0}^{3} c_n H_n$

koefficienterna c_n räknas som

$$c_n = \frac{1}{\|H_n\|_w^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{x} H_n(x) e^{-x^2} dx$$

kan beräknas direkt eller

med hjälp av genererande funktionen:

$$e^{2xz-z^2} = \sum H_n(x) \frac{z^n}{n!}$$

sätter $z = \frac{1}{2}$

$$e^{-\frac{1}{4}} e^{x} = \sum H_n(x) \cdot \frac{1}{2^n n!}$$

4 Förberedelsesteget:

tar $v(x,t) = x - \pi - 1$, $w = u - v$

för w får problemet

$$w_{tt} + 4w - w_{xx} + w_x = \pi - x$$

$$w_x(0,t) = 0 \; ; \; w(\pi, t) = 0$$

$$w(x,0) = \pi + 1 - x$$

$$w_t(x,0) = 0$$

Separerar variabler, $w(x,t) = X(x)T(t)$

$$X'' + X' + \lambda X = 0$$

Ej S-L formen. Transformerar till

$$e^{x}(e^{-x}X')' + \lambda X = 0$$

$$(e^{-x}X')' + e^{-x}\lambda X = 0$$

Vikt: $\omega(x) = e^{-x}$

Löser X-ekvationen, hittar egenfunkt. och egenvärden.

$$\lambda_n = (n\pi + \tfrac{1}{4})^2 - \tfrac{1}{4}$$

$$X_n(x) = e^{x/2} \cos\sqrt{\lambda_n}\, x$$

Efter detta, standart. Söker lösningen som $w(x,t) = \sum X_n(x) T_n(t)$

Sätter in i ekvationen, multipl. med X_m och integrerar, kommer till ODE för $T_n(t)$.

5. $\hat{f}(\omega) = \dfrac{\omega}{\underline{(1+\omega^2)^2}} \theta(\omega)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2|t|} \operatorname{sgn} t \, dt \overset{\text{parceval}}{=}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \mathcal{F}[e^{-2|t|} \operatorname{sgn} t] dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot (-2i) \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \frac{\omega}{\omega^2+4} d\omega$$

- beräknas.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = \hat{f}(0) = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(3t) dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left[e^{3it} + e^{-3it}\right] dt$$

$$= \frac{1}{2} \hat{f}(3) + \frac{1}{2} \hat{f}(-3).$$

6. $u_{xx} + u_{yy} - 4u = 0$

Delar variabler: $u(x,y) = X(x)\,Y(y)$

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = 4$$

$$\frac{X''}{X} = -\mu^2 \; ; \; \frac{Y''}{Y} = 4 + \mu^2$$

Randvillkoren för X är homogena.

Egenfunktioner $X_n(x) = \sin(nx)$,

$\mu_n = n$

Söker lösningen på formen

$$u(x,y) = \sum X_n(x)\,Y_n(y)$$

för $Y_n(y)$ får ekvation.

$$Y_n'' = (4+n^2)\,Y_n$$

$$Y_n(y) = A_n \cosh\left(\sqrt{4+n^2}\,y\right) + B_n \sinh\left(\sqrt{4+n^2}\,y\right)$$

A_n, B_n hittas ur randvillk. för $y=0$ och $y=2\pi$.