MVE030 Fourieranalys F2/Kf2, 6 poäng

OBS! Ange kod, kurskod samt linje.

1. Med hjälp av utveckling i Fourier-Bessel serie hitta en radial lösning $u(r,t)$ av randvärdeproblem för värmeekvationen
$$u_t = \Delta u - u$$
i cirkelskivan $r < 2$ med begynnelsevillkoret $u(r,0) = 4 - r^2, 1 \le r \le 2$, $u(r,0) = 3, r < 1$ och randvillkoret $u(r,t) = 0$ för $r = 2$.

2. Hitta andragradpolynomet $P(x)$ som minimerar $\int_1^3 |x^3 - P(x)|^2 x^{-1} dx$. Koefficienter beräknas approksimativt.

3. Lös ekvationen $u_{xx} + u_{yy} - 8u = 1$ i rektangeln $x \in (0,\pi), y \in (0,2\pi)$ med randvillkoren $u(x,2\pi) = \sin x - \sin(2x), x \in (0,\pi)$, $u = 0$ på resten av randen. Använd F-serie i något led.

4. Funktionen $f(x)$ har Fouriertransformen $\hat{f}(\xi)$ där $\hat{f}(\xi) = 1$ på 3 intervall $2^n < x < 2^{n+1}$, $n = 0,2,4$, $\hat{f}(\xi) = -1$ på 3 intervall $2^n < x < 2^{n+1}$, $n = 1,3,5$, och $\hat{f}(\xi) = 0$ utanför dessa 6 intervall. Hitta $f*f*f$, $f*f*f*f$, $f*f*f*f*f$, $f*f*f*f*f*f$ och $\int_{-\infty}^{\infty} |f*g|^2 dx$, där $g(x) = \frac{\sin(5x)}{x}$.

5. Formulera integreringsregeln för Fourierserier. Med hjälp av den regeln och F-serien för $f(\theta) = \theta^2$, $\theta \in (-\pi,\pi)$ (ur BETA) bevisa att
$$\theta^4 - 2\pi^2\theta^2 = 48 \sum_1^\infty \frac{(-1)^{n+1}\cos(n\theta)}{n^4} - \frac{7\pi^4}{15}$$
för $\theta \in (-\pi,\pi)$. Hitta summan av serien för $\theta = \pi, 2\pi, 4\pi$. Hur många gånger kan man derivera den ursprungliga serien?

6. Lös Dirichletproblemet i klottet $r < 1$ i $\mathbb{R}^3$:
$$\Delta u(r,\theta,\phi) = 0, r < 1;\ u(1,\theta,\phi) = \cos(\phi),\ 0 \le \phi \le \pi/2;\ u(1,\theta,\phi) = 0,\ \pi/2 \le \phi \le \pi.$$
Led: använd sfäriska koordinater och Legendrepolynomen.

7. Låt $\{\phi_n\}_{n=1}^\infty$ vara ett ortonormalt system i $L^2(a,b)$. Ange tre villkor som alla var för sig är ekvivalent med att $\{\phi_n\}_{n=1}^\infty$ ar ett fullständigt system (en bas) i $L^2(a,b)$ (Sats 3.4). Beviset krävs. Ge exempel på ortonormala system vilka är en bas, och vilka inte är bas. Vilka system som ni vet är ortogonala på hela axeln, på halvaxeln??

8. Berätta så mycket du kan om linjära system, deras egenskaper, karakteristiker och Fouriertransformationsbaserade analysmetoder. Ge exempel.

Varje uppgift kan ge max. 8 p. Skrivningen beräknas färdigrättas den 21. januari.
Ev. granskning/visning den 25. januari, 11-13 i mitt knotor.
G.Rozenblioum

GR

MVE030 Fourier Analysis

F2, Kf 2

Tenta 2010-01-16. Lösningförslag

---

1. Löser i polära koordinater.

$$u_t = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r - u$$

Separerar variabler

$$\frac{T'}{T} = \frac{R'' + r^{-1} R' - R}{R} = -\mu^2$$

R-ekvationen lösas med Bessel:

$$R_n(r) = J_0\left(\frac{\mu_n r}{2}\right) \quad ; \mu_n \text{ - nollställen av } J_0$$

$$u(r,t) = \sum J_0\left(\frac{\mu_n r}{2}\right) C_n e^{-\mu_n^2 t}$$

C_n hittar ur beg. villk.

$$C_n = \frac{1}{\left\| J_0\left(\frac{\mu_n r}{2}\right) \right\|^2} \int_0^2 J_0\left(\frac{\mu_n r}{2}\right) f(r)\, r\, dr$$

Integral räknas med rekurr. formler

2. Man tar funktioner $f_0 = 1$, $f_1 = x$, $f_2 = x^2$ och ortogonaliserar med Gram-Schmidt metoden. Vi får $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ — polynom av grad $0, 1, 2$.

Efter detta blir sökta polynomen

$$P = c_0 \varphi_0 + c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2$$

$$c_k = \frac{\langle x^3, \varphi_k \rangle}{\langle \varphi_k, \varphi_k \rangle}.$$

alla skalärproducter räknas i Hilbertrummet $L_2(1,3)$ med vikten x^{-1}.

3. Söker lösningar som F-serie i x-variabel med koefficienterna beroende på y. x variabeln väljs eftersom i x variabel är randvillkor homogena.

$$u(x,y) = \sum a_n(y) \sin nx$$

Sätter in i ekvationen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-n^2 a_n(y) + a_n''(y) - 8 a_n(y) \right) \sin(nx) = 1$$

multiplicerar med $\sin kx$ och integrerar

$$(*) \quad -k^2 a_k(y) + a_k''(y) - 8 a_k(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1+(-1)^{k+1}}{k}$$

Ekvationen $(*)$ lösas med randvillkor

$$a_k(0) = 0; \quad a_k(2\pi) = \begin{cases} 1, & k = 1 \\ -2, & k = 2 \\ 0, & k > 2 \end{cases}$$

Får uttryck genom hyperb. funktioner

4. Vi har

$$\widehat{f * \cdots * f} = \hat{f} \cdot \hat{f} \cdot \ldots \cdot \hat{f}$$

därför för vår function

$$\underbrace{f * \cdots * f}_{k} = f, \quad = \mathcal{F}^{-1}\hat{f} \quad k \cdot \text{udda};$$

$$\underbrace{f * \cdots * f}_{k} = \mathcal{F}^{-1}|\hat{f}| \quad k \cdot \text{jämn}$$

därför

$$\underbrace{f * \cdots * f}_{\text{udda}} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi}\, d\xi$$

$$\underbrace{f * \cdots * f}_{\text{jämn}} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)| e^{ix\xi}\, d\xi$$

Parceval:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f * g|^2 dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f} \cdot \hat{g}|^2 d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_1^5 d\xi.$$

5. I Beta hittas F-serie

$$\theta^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n^2}\cos n\theta$$

$\theta \in [-\pi, \pi]$

Den första integreringen ger

$$F(\theta) = \frac{\theta^3}{3} - \frac{\pi^2}{3}\theta = C_0 + 4\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^3}\sin(n\theta)$$

med $C_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\theta)\,d\theta = 0.$

Den andra integreringen ger

$$\frac{\theta^4}{12} - \frac{\pi^2}{6}\theta^2 = C_0 + 4\sum \frac{(-1)^{n+1}\cos n\theta}{n^4}$$

$$C_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\theta^4}{12} - \frac{\pi^2\theta^2}{6}\right)d\theta = -\frac{7\pi^4}{180}$$

$\theta \in [-\pi, \pi]$

summan av serien är densamma i punkter 0, 2π, 4π osv, $=0$ eftersom ~~fu~~ serien ger en periodisk funktion.

Den första serien kan deriveras 1 gång. Vidare - går inte eftersom den första derivatan av funktionen inte är kontinuerlig.

6. I sfäriska koordinater

$$u(r,\theta,\varphi) = u(r,\varphi)$$

eftersom randdata inte beror på θ.

Efter standarta variabelbytet

$s = \cos\varphi$, kommer man till

$$u_{rr} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial s}\left((1-s^2)\frac{\partial u}{\partial s}\right) = 0$$

variabelseparation ger

$$u(r,s) = \sum a_n r^n P_n(s)$$

där P_n - Legendrepolynom.

koefficienterna a_n beräknas som

$$a_n = \frac{1}{\|P_n\|^2}\int_{-1}^{1} f(s)\,P_n(s)\,ds$$

$$f(s) = \begin{cases} s, & s>0 \\ 0, & s<0 \end{cases}$$

Sådana integral beräknades i kursen m.h.av rekurrenta formler.