MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers

Datum: 2010-08-26
Telefon: Magnus Goffeng
0703 - 088304
Skrivtid: 8.30 – 13.30

Tentamen i Fourieranalys MVE030 för F2 och Kf2 och Fouriermetoder MVE290 för TM2

Hjälpmedel: Godkänd räknedosa samt BETA eller Standard Math. Tables

(maxpoäng inom parentes, med summa 61)

1. Anta $0 < \alpha < 1$. Bestäm summorna

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 - \alpha^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \alpha^2} \qquad \text{och} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2 - \alpha^2)^2},$$

exempelvis med hjälp av Fourierserien för funktionen $\cos \alpha x$ i $[-\pi, \pi]$. (8)

2. Lös följande problem, där k är en positiv konstant,

$$\begin{cases} u_t = k u_{xx} + \cos x, & 0 < x < \pi,\ t > 0, \\ u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0, & \\ u(x,0) = \cos x. & \end{cases}$$

(8)

3. Lågpassfiltret LP_α, där $\alpha > 0$, definieras som avbildningen $f \mapsto LP_\alpha(f)$ given av

$$\widehat{LP_\alpha(f)} = \hat{f}\, \chi_{(-\alpha,\alpha)}.$$

Här ges funktionen $\chi_{(-\alpha,\alpha)}$ av att $\chi_{(-\alpha,\alpha)}(\xi) = 1$ om $|\xi| < \alpha$ och $= 0$ annars. Beräkna $LP_\alpha(1/(1+x^2))$. Svaret skall ges på formen realdel $+$ $i \cdot$ imaginärdel. (8)

4. Låt (r, θ) vara polära koordinater i planet och anta $0 < R_0 < R_1$. Lös problemet

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & R_0 < r < R_1, \\ u_r(R_0, \theta) = 1, \;\; u(R_1, \theta) = |\theta|, & |\theta| \leq \pi. \end{cases}$$

(8)

5. a) Bestäm det polynom $P(x)$ av grad högst två som minimerar

$$\int_{-1/3}^{1/3} |\sin x - P(x)|^2 \, dx.$$

b) Visa också att det finns en punkt $x_0 \in (0, 1/3)$ sådan att $\sin x - P(x)$ är positiv i $(0, x_0)$ och negativ i $(x_0, 1/3)$. (6+2)

6. Ett cirkulärt membran med radie r_0 beskrivs av en funktion $u(r, \theta, t)$, där r, θ är polära koordinater och $|\theta| \leq \pi$. Då satisfierar u vågekvationen $u_{tt} = c^2 \Delta u$, och $u(r_0, \theta, t) = 0$ för alla θ och t. Här är $c > 0$ en konstant. Om initialvillkoren är $u(r, \theta, 0) = 0$ och $u_t(r, \theta, 0) = (r_0 - r)(\pi - |\theta|)$, vad blir u? Svaret får innehålla integraler som inte låter sig beräknas eller förenklas. (9)

7. Givet ett reguljärt Sturm-Liouville-problem, visa
a) att dess egenvärden är reella
b) att två egenfunktioner med olika egenvärden är ortogonala med avseende på viktsfunktionen. (3+3)

8. Låt f vara en periodisk funktion.
a) Ange villkor på f som garanterar att Fourierserien för f' fås genom termvis derivering av Fourierserien för f.
b) Beskriv också hur en periodisk funktions regularitet, mätt med derivators existens och kontinuitet, återspeglas i Fourierkoefficienternas storlek, och omvänt.
Inga bevis efterfrågas i denna uppgift. (3+3)

MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers

Datum: 2010-08-26

LÖSNINGAR TILL
tentamen i Fourieranalys MVE030 för F2 och Kf2 och Fouriermetoder MVE290 för TM2

1.
Fourierserien för funktionen $\cos \alpha x$ i $[-\pi, \pi]$ fås ur BETA 13.1 (15):

$$\cos \alpha x = \frac{\sin \alpha\pi}{\alpha\pi} + \frac{2\alpha \sin \alpha\pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos nx}{n^2 - \alpha^2}.$$

Denna funktion, fortsatt till en 2π-periodisk funktion på hela linjen, är kontinuerlig och styckvis glatt. (Kontinuiteten i π följer av att funktionen är jämn.) Därför konvergerar Fourierserien i alla punkter, mot funktionens värde. I punkten $x = 0$ får vi

$$1 = \frac{\sin \alpha\pi}{\alpha\pi} + \frac{2\alpha \sin \alpha\pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 - \alpha^2}.$$

Det följer att

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 - \alpha^2} = \frac{\pi}{2\alpha \sin \alpha\pi} - \frac{1}{2\alpha^2}.$$

Med $x = \pi$ får man på liknande sätt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \alpha^2} = \frac{1}{2\alpha^2} - \frac{\pi \cot \alpha\pi}{2\alpha}.$$

För den tredje serien kan man använda Parsevals formel, som i BETA 13.1, översta formeln i rutan med Parsevals identiteter, med $T = 2\pi$. Man får

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 \alpha x \, dx$$
$$= \left(\frac{\sin \alpha\pi}{\alpha\pi}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2\alpha \sin \alpha\pi}{\pi}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2-\alpha^2)^2}.$$

Integralen här räknas ut via $\cos^2 \alpha x = (1 + \cos 2\alpha x)/2$ och blir $\pi + (2\alpha)^{-1} \sin 2\alpha\pi$. Detta ger

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2-\alpha^2)^2} = -\frac{1}{2\alpha^4} + \frac{\pi^2}{4\alpha^2 \sin^2 \alpha\pi} + \frac{\pi \sin 2\alpha\pi}{8\alpha^3 \sin^2 \alpha\pi},$$

där sista termen kan förenklas till $\pi \cot \alpha\pi / 4\alpha^3$.

Ett annat, elegant sätt att bestämma den tredje summan är att utgå från formeln för den andra summan som vi härledde, och derivera båda leden med avseende på parametern α.

2.

Eftersom den inhomogena termen $\cos x$ i differentialekvationen inte beror av t, kan man använda steady state-metoden. Det innebär att först finna en t-oberoende lösning $u_0(x)$ till differentialekvationen som dessutom har rätt randvärden i ändpunkterna 0 och π. Man får $u_0''(x) = -k^{-1} \cos x$ så att $u_0(x) = k^{-1} \cos x + ax + b$, och randvärdena ger $u_0(x) = k^{-1} \cos x - k^{-1} + 2x/(\pi k)$.

Nu sätter vi $u(x,t) = u_0(x) + v(x,t)$ och söker v, som måste vara en lösning till problemet

$$\begin{cases} v_t = k v_{xx}, \\ v(0,t) = 0, \quad v(\pi,t) = 0, \\ v(x,0) = (1-k^{-1}) \cos x + k^{-1} - 2x/(\pi k). \end{cases}$$

Detta är ett standardproblem, som löses med utveckling i sinusserier. För att utveckla de tre termerna i initialvärdet $v(x,0)$ ovan, kan man använda formlerna (11), (25) (som är enklare än (2)), och (12) i BETA 13.1. Man får

$$\begin{aligned} v(x,0) &= (1-k^{-1})\frac{8}{\pi}\sum_1^\infty \frac{n}{4n^2-1}\sin 2nx \\ &+ \frac{4}{k\pi}\sum_1^\infty \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} - \frac{4}{k\pi}\sum_1^\infty (-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}. \end{aligned}$$

Här ser man att de udda termerna i den tredje summman sammanfaller med termerna i den andra summan, så att

$$\begin{aligned} v(x,0) &= (1-k^{-1})\frac{8}{\pi}\sum_1^\infty \frac{n}{4n^2-1}\sin 2nx + \frac{4}{k\pi}\sum_1^\infty \frac{\sin 2nx}{2n} \\ &= \frac{1}{\pi}\sum_1^\infty \frac{8kn^2-2}{kn(4n^2-1)}\sin 2nx. \end{aligned}$$

Därför ges v av

$$v(x,t) = \frac{1}{\pi}\sum_1^\infty \frac{8kn^2-2}{kn(4n^2-1)}e^{-4kn^2t}\sin 2nx.$$

Den sökta funktionen u blir alltså

$$u(x,t) = v(x,t) + u_0(x) = v(x,t) + k^{-1}(\cos x - 1) + 2x/(\pi k)$$

med ovanstående v.

3.
Med $f(x) = 1/(1+x^2)$ har man enligt tabell $\hat{f}(\xi) = \pi e^{-|\xi|}$, och $LP_\alpha(1/(1+x^2))$ har alltså Fouriertransformen $\pi e^{-|\xi|}\chi_{(-\alpha,\alpha)}(\xi)$. Enligt Fouriers inversionsformel är $LP_\alpha(1/(1+x^2))$ då

$$\frac{1}{2\pi}\pi\int_{-\alpha}^{\alpha} e^{-|\xi|}e^{ix\xi}\,d\xi = \frac{1}{2}\int_0^\alpha e^{-\xi+ix\xi}\,d\xi + \frac{1}{2}\int_0^\alpha e^{-\xi-ix\xi}\,d\xi,$$

där vi bytte variabel $\xi \mapsto -\xi$ i integralen mellan $-\alpha$ och 0. Men detta är detsamma som

$$\begin{aligned}
\Re \int_0^\alpha e^{-\xi+ix\xi}\,d\xi &= \Re \frac{e^{-\alpha+i\alpha x}-1}{-1+ix} \\
&= \Re \frac{(e^{-\alpha}(\cos\alpha x + i\sin\alpha x)-1)(-1-ix)}{1+x^2} \\
&= \frac{1-e^{-\alpha}\cos\alpha x + xe^{-\alpha}\sin\alpha x}{1+x^2},
\end{aligned}$$

som är svaret. Imaginärdelen blir alltså 0.

4.
För detta Dirichletproblem i ett ringformat område vet man att variabelseparation leder till en lösning med serieutveckling av typ

$$u(r,\theta) = a_0 + b_0 \ln r + \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} e^{in\theta}(a_n r^n + b_n r^{-n}). \tag{1}$$

(Se annars härledningen i Folland 4.4, formel (4.33).) De givna randvärdena leder till

$$\frac{b_0}{R_0} + \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} e^{in\theta} n(a_n R_0^{n-1} - b_n R_0^{-n-1}) = 1$$

och

$$a_0 + b_0 \ln R_1 + \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} e^{in\theta}(a_n R_1^n + b_n R_1^{-n}) = |\theta|,$$

ekvationer som ska gälla för alla $\theta \in [-\pi,\pi]$. Därför utvecklar vi högerleden i Fourierserier och identifierar koefficienterna i varje ekvation. Konstanten 1 är sin egen Fourierserie, så man får $b_0/R_0 = 1$ och $a_n R_0^{n-1} - b_n R_0^{-n-1} = 0$ för alla $n \neq 0$. Fourierserien för $|\theta|$ är enligt BETA 13.1 (3) med $\alpha = 1$ och $L = h = \pi$

$$|\theta| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_1^\infty \frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)\theta.$$

Detta skriver vi om som

$$|\theta| = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z},\, n\,\text{udda}} \frac{1}{n^2} e^{in\theta}.$$

Därför blir $a_0 + b_0 \ln R_1 = \pi/2$ och $a_n R_1^n + b_n R_1^{-n} = 0$ för jämna $n \neq 0$, medan $a_n R_1^n + b_n R_1^{-n} = -2/(\pi n^2)$ för udda n. För varje n har vi nu två ekvationer för a_n och b_n, och man får lätt att $a_0 = \pi/2 - R_0 \ln R_1$ och $b_0 = R_0$. För jämna $n \neq 0$ blir $a_n = b_n = 0$, medan för udda n

$$a_n = -\frac{2}{\pi n^2} \frac{R_1^n}{R_0^{2n} + R_1^{2n}}$$

och

$$b_n = -\frac{2}{\pi n^2} \frac{R_1^{-n}}{R_0^{-2n} + R_1^{-2n}}.$$

Dessa värden ska stoppas in i uttrycket (1), men först observerar vi att $b_n = a_{-n}$ för dessa n. Den del av summan i (1) som innehåller b_n kan därför skrivas, efter ett teckenbyte $n \mapsto -n$,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z},\, n\,\text{udda}} e^{-in\theta} a_n r^n.$$

Svaret blir därför

$$u(r,\theta) =$$
$$\frac{\pi}{2} - R_0 \ln R_1 + R_0 \ln r - \frac{4}{\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z},\, n\,\text{udda}} \frac{R_1^n r^n}{n^2(R_0^{2n} + R_1^{2n})} \cos n\theta.$$

5.

Transformationen $x = t/3$ tar oss till intervallet $-1 \leq t \leq 1$, där vi vet att ortogonalpolynomen, med vikt 1, är Legendrepolynomen $P_n(t)$. Med $P(x) = Q(t)$ ska vi minimera

$$\frac{1}{3} \int_{-1}^{1} |\sin\frac{t}{3} - Q(t)|^2 \, dt,$$

där faktorn $1/3$ är betydelselös. Enligt satsen om bästa approximation blir det minimerande polynomet

$$Q(t) = \sum_0^2 c_n P_n(t),$$

där

$$c_n = \frac{1}{\|P_n\|^2} \int_{-1}^{1} \sin\frac{t}{3}\, P_n(t)\, dt.$$

Här tas normen i rummet $L^2[-1,1]$. Polynomet Q är en ortogonalprojektion. För jämna n är $P_n(t)$ en jämn funktion, så integralen blir 0. Då återstår bara fallet $n = 1$, med $P_1(t) = t$ (tabell) och $\|P_1\|^2 = 2/3$. Efter en partialintegration får man

$$c_1 = \frac{3}{2}\left(-6\cos\frac{1}{3} + 18\sin\frac{1}{3}\right) = 27\sin\frac{1}{3} - 9\cos\frac{1}{3}.$$

Då ger $Q(t) = c_1 t$ att

$$P(x) = Q(t) = 3c_1 x = \left(81\sin\frac{1}{3} - 27\cos\frac{1}{3}\right) x.$$

För att teckenstudera $\sin x - P(x)$ observerar vi att $\sin x$ är konkav i $[0, 1/3]$. Genom att rita en enkel figur ser man därför att påståendet i b) följer om linjen $y = P(x)$ skär kurvan $y = \sin x$ i någon punkt i det öppna intervallet $(0, 1/3)$, eftersom båda går genom origo. Att de skär varandra kan man verifiera numeriskt. Men det är nog enklare att utesluta motsatsen med följande argument: Om de inte skär varandra, skulle skillnaden $\sin x - P(x)$ ha konstant tecken i $(0, 1/3)$. Eftersom P liksom Q är en ortogonalprojektion, är $\sin x - P(x)$ ortogonal mot $P_1(t) = 3x$ i intervallet $(-1/3, 1/3)$, så att

$$\int_{-1/3}^{1/3} (\sin x - P(x)) x\, dx = 0.$$

Här är integranden jämn, så man har också

$$\int_0^{1/3} (\sin x - P(x)) x\, dx = 0.$$

Av denna likhet följer att $\sin x - P(x)$ inte kan ha konstant tecken i $(0, 1/3)$, och saken är klar.

6.
Vågekvationen blir i polära koordinater

$$u_{tt} = c^2\left(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}\right).$$

Variabelseparation $u(r,\theta,t) = T(t)R(r)\Theta(\theta)$ ger

$$\frac{1}{c^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{R''(t) + r^{-1}R'(t)}{R(t)} + \frac{1}{r^2}\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = m,$$

för någon konstant m. För T får vi den enkla ekvationen

$$T''(t) = c^2 m T(t) = 0.$$

Det första av de givna initialvillkoren medför att $T(0) = 0$. Om $m > 0$ blir då $T(t)$ en multipel av $\sinh c\sqrt{m}t$. Det skulle innebära att membranets svängningar växer obegränsat med tiden, och så kan ett membran inte bete sig. Fallet $m = 0$ ger en multipel av t, något som också är fysikaliskt orimligt. Alltså är $m < 0$. Vi skriver då $m = -\mu^2$ med $\mu > 0$, och $T(t)$ blir en multipel av $\sin c\mu t$. (Den som på denna punkt föredrar ett mer matematiskt än fysikaliskt resonemang kan läsa parentesen nedan.)

Den andra likheten i den dubbla ekvationen ovan medför

$$\frac{r^2R''(t) + rR'(t) + \mu^2 r^2 R(t)}{R(t)} = -\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = \nu^2,$$

med en ny konstant ν. För Θ får vi

$$\Theta''(\theta) + \nu^2\Theta(\theta) = 0,$$

och eftersom Θ är 2π-periodisk ser vi först att ν^2 måste vara positivt eller 0, så att talet ν är reellt. Sen får vi också att ν måste vara ett heltal, som kan antas ickenegativt. Vi skriver då $\nu = n \in \{0, 1, ...\}$, och ser att $\Theta(\theta)$ är en linjärkombination av $\cos n\theta$ och $\sin n\theta$.

Ekvationen för R blir

$$r^2R''(t) + rR'(t) + (\mu^2 r^2 - n^2)R(t) = 0.$$

Detta är Bessels differentialekvation, med lösningar som är linjärkombinationer av $J_n(\mu r)$ och $Y_n(\mu r)$. Randvillkoret

$u(r_0, \theta, t) = 0$ medför att $R(r_0) = 0$ och att $R(r)$ är begränsad även vid $r = 0$. Därför kan vi utesluta $Y_n(\mu r)$ och få att $R(r)$ måste vara en multipel av $J_n(\mu r)$, med ett sådant μ att μr_0 är ett nollställe till J_n.

(Här utgick vi från att $m = -\mu^2 < 0$, så att μ är reellt och kan väljas positivt. Men $m > 0$ skulle innebära μ är rent imaginärt och att $R(r)$ blir en linjärkombination av I_n och K_n. Då kan vi först utesluta K_n som är singulär i 0 och sen I_n som inte har något nollställe på $\mathbb{R}_+$. Och fallet $m = 0$ ger en Eulerekvation med lösningar som är linjärkombinationer av r^n och r^{-n}, resp.av 1 och $\ln r$ för $n = 0$. Då utesluts r^{-n} och $\ln r$ av begränsningsvillkoret vid 0, och randvärdet 0 i r_0 gör sedan även detta fall omöjligt.)

Om λ_{kn}, $k = 1, 2, ...$, betecknar de positiva nollställena till J_n, har vi alltså $\mu = \lambda_{kn}/r_0$ för något k. Det ovanstående innebär därför att de separerade lösningarna är av formen

$$\sin \frac{c\lambda_{kn} t}{r_0} J_n\left(\frac{\lambda_{kn} r}{r_0}\right) (a \cos n\theta + b \sin n\theta).$$

Lösningen till det givna problemet är en summa

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{c\lambda_{kn} t}{r_0} J_n\left(\frac{\lambda_{kn} r}{r_0}\right) (a_{kn} \cos n\theta + b_{kn} \sin n\theta).$$

För att bestämma koefficienterna a_{kn} och b_{kn} använder vi det andra initialvillkoret. Genom att derivera med avseende på t och sen sätta $t = 0$ får man

$$(2) \quad \frac{c}{r_0} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{kn} J_n\left(\frac{\lambda_{kn} r}{r_0}\right) (a_{kn} \cos n\theta + b_{kn} \sin n\theta) = (r_0 - r)(\pi - |\theta|).$$

Nu vet man att funktionerna $r \mapsto J_n(\lambda_{kn} r/r_0)$, $k = 1, 2, ...$, bildar ett fullständigt ortogonalsystem på intervallet $(0, r_0)$ med vikten $w(r) = r$, se BETA 12.4 "Orthogonal series ...". Eftersom högerledet i (2) är jämnt i θ, kommer b_{kn} att bli 0. Koefficienterna a_{kn} kan man få genom att kombinera formeln för koefficienterna i utvecklingar i dessa Besselfunktioner med den vanliga koefficientformeln för cosinusserier. Det är dock aningen enklare att utnyttja att högerledet är en produkt av en funktion av r och en av θ, och utveckla den senare med hjälp av tabell. Man får, t ex enligt BETA 13.1 (6) med $h = L = \pi$,

$$\pi - |\theta| = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(2m-1)\theta}{(2m-1)^2}.$$

Det betyder att vi kan se (2) som en likhet mellan två cosinusserier och identifiera koefficienterna, vilket ger

$$\frac{c}{r_0} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{k0}\, J_0\left(\frac{\lambda_{k0} r}{r_0}\right) a_{k0} = (r_0 - r)\frac{\pi}{2}$$

för $n = 0$. För jämna $n \neq 0$ blir $a_{kn} = 0$ och för udda n får man

$$\frac{c}{r_0} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{kn}\, J_n\left(\frac{\lambda_{kn} r}{r_0}\right) a_{kn} = (r_0 - r)\frac{4}{\pi n^2}.$$

Nu kan vi använda formeln för Besselkoefficienter (BETA 12.4 igen) och få

$$a_{k0} = \frac{\pi}{c r_0 \lambda_{k0} J_1(\lambda_{k0})^2} \int_0^{r_0} (r_0 - r) J_0\left(\frac{\lambda_{k0} r}{r_0}\right) r\, dr,$$

och

$$a_{kn} = \frac{8}{\pi c r_0 n^2 \lambda_{kn} J_{n+1}(\lambda_{kn})^2} \int_0^{r_0} (r_0 - r) J_n\left(\frac{\lambda_{kn} r}{r_0}\right) r\, dr$$

för udda n.

Svaret blir därför

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sin\frac{c\lambda_{kn} t}{r_0}\, J_n\left(\frac{\lambda_{kn} r}{r_0}\right) a_{kn} \cos n\theta,$$

där summan i n löper över 0 och de udda naturliga talen, och a_{kn} har de angivna värdena.