

**Tentamen i Fourieranalys MVE030 för F2 och Kf2
och Fouriermetoder MVE290 för TM2**

Hjälpmedel: Godkänd räknedosa, BETA samt “Några tips om Fourierserier m.m. i BETA” (två sidor).

(maxpoäng inom parentes, med summa 60)

1. Funktionen f har Fouriertransformen $\hat{f}(\xi) = 1/\sqrt{|\xi|}$ för $|\xi| < 1$ och $= 0$ för övriga ξ . Bestäm $f''(0)$ och

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{\sin \frac{x}{2}}{x} e^{ibx} dx,$$

där b är ett reellt tal. (3+5)

2. Lös problemet

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx}, & 0 < x < \ell, t > 0, \\ u_x(0, t) = 0, \quad u(\ell, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = \ell - x, & 0 < x < \ell. \end{cases}$$

Här är ℓ och k positiva konstanter. (8)

3. Låt N vara ett udda naturligt tal. Bestäm med detta N den diskreta Fouriertransformen av följden $a_n = (-1)^n$, $n = 0, \dots, N - 1$. Beräkna därefter

$$\sum_{m=0}^{N-1} \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi m}{N}}.$$

Det är valfritt att använda kursens och kursbokens definition av den diskreta Fouriertransformen eller den något avvikande definitionen i BETA. (3+5)

4. Lös problemet

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} + (1-x)t, & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, & 0 < x < 1, \end{cases}$$

där $c > 0$ är en konstant. (8)

5. Betrakta i intervallet $[0, 2]$ Sturm-Liouville-problemet

$$f'' + \lambda f = 0, \quad f(0) = 0, \quad 2f'(2) = f(2).$$

Hur många egenvärden med $\lambda < 9$ har detta problem? (8)

6. Lös Dirichlets problem $\Delta u = 0$ i cylindern $x^2 + y^2 < R_0^2$, $0 < z < 1$, med randvärdena $u(x, y, 0) = u(x, y, 1) = 0$ och $u(x, y, z) = \sin \frac{\pi z}{2}$ då $x^2 + y^2 = R_0^2$. (8)

7. Formulera konvergenssatsen för Fourierserien av en styckvis glatt funktion, och bevisa den i kontinuitetspunkter. (6)

8. Betrakta ett inhomogent randvärdesproblem $Lu(x, y) = F(x)$ i en axelparallell rektangel, med givna randvillkor som ger värdena av u eller dess normalderivata på varje rektangelsida. Här är L en lämplig linjär andra ordningens partiell differentialoperator, och F beror alltså bara av x . Beskriv hur man behandlar detta problem för att sedan kunna använda metoden med variabelseparation. Frågan avser bara *förbere- delserna* för variabelseparation. (6)

LÖSNINGAR TILL
tentamen i Fourieranalys MVE030 för F2 och Kf2
och Fouriermetoder MVE290 för TM2

Uppgift 1.

Fouriertransformen av f'' är $-\xi^2 \hat{f}(\xi) = -|\xi|^{3/2} \chi_{\{|\xi| < 1\}}$. Detta är en integrabel funktion, och Fouriers inversionsformel för $x = 0$ ger

$$f''(0) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 |\xi|^{3/2} d\xi = -\frac{2}{5\pi}.$$

Enligt tabell är

$$\mathcal{F} \frac{\sin \frac{x}{2}}{x} = \pi \chi_{(-1/2, 1/2)}$$

och därmed

$$\mathcal{F} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{x} e^{ibx} \right) = \pi \chi_{(b-1/2, b+1/2)}.$$

Man kan nu använda Plancherels formel på den givna integralen. Vi kastar om ordningen mellan faktorerna för att slippa effekten av komplexkonjugeringen i formeln. Då får man

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \frac{x}{2}}{x} e^{ibx} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \pi \int \chi_{\{b-\frac{1}{2} < \xi < b+\frac{1}{2}\}} \frac{1}{\sqrt{|\xi|}} \chi_{\{|\xi| < 1\}} d\xi.$$

Denna kvantitet är en jämn funktion av b . Det ser man antingen genom att granska högerledet, eller genom att observera att högerledet och därmed vänsterledet är reellvärda, så att ingenting ändras om man ersätter e^{ibx} i vänsterledet med $\cos bx$.

Om $b > 3/2$ blir integralen uppenbarligen 0. För $1/2 < b \leq 3/2$ får man

$$\frac{1}{2} \int_{b-1/2}^1 \frac{1}{\sqrt{|\xi|}} d\xi = 1 - \sqrt{b-1/2}.$$

För $0 \leq b \leq 1/2$ blir uttrycket

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{b-1/2}^{b+1/2} \frac{1}{\sqrt{|\xi|}} d\xi &= \frac{1}{2} \int_{b-1/2}^0 \frac{1}{\sqrt{|\xi|}} d\xi + \frac{1}{2} \int_0^{b+1/2} \frac{1}{\sqrt{|\xi|}} d\xi \\ &= \sqrt{1/2 - b} + \sqrt{1/2 + b}. \end{aligned}$$

För att få uttryckets värde även för $b < 0$ ersätter vi b med $|b|$ och får sammanfattningsvis att integralens värde är

$$\begin{cases} \sqrt{1/2 - |b|} + \sqrt{1/2 + |b|} & \text{om } |b| \leq 1/2 \\ 1 - \sqrt{|b| - 1/2} & \text{om } 1/2 < |b| \leq 3/2 \\ 0 & \text{om } |b| > 3/2. \end{cases}$$

Anm. I stället för att använda Plancherels formel kan man se den givna integralen som Fouriertransformen i punkten $-b$ av en produkt, alltså en faltning av två Fouriertransformer. Faltningen leder till samma integral i ξ som ovan.

Uppgift 2.

Randvillkoren för $x = 0$ och $x = \ell$ är homogena, så man kan variabelseparera och ansätta $u(x, t) = X(x)T(t)$. Ekvationen blir

$$\frac{1}{k} \frac{T'}{T} = \frac{X''}{X},$$

och denna kvantitet måste vara konstant, säg λ .

För X betyder detta att $X'' = \lambda X$, och randvillkoren ger $X'(0) = 0$ och $X(\ell) = 0$. Då ser vi, som vanligt via funktioner $\cosh \mu x$ och $\sinh \mu x$, att det inte finns några lösningar med $\lambda > 0$ som uppfyller randvillkoren. Detsamma gäller för $\lambda = 0$. För $\lambda < 0$ skriver vi $\lambda = -\nu^2$ där $\nu > 0$ och finner lösningar $X(x) = \cos \nu x$ med $\nu = (n - 1/2)\pi/\ell$, $n = 1, 2, \dots$. Observera att vi därmed har hittat alla egenfunktioner till ett reguljärt Sturm-Liouville-problem. Dessa cosinusfunktioner bildar därför ett fullständigt ortogonalsystem i $L^2(0, \ell)$.

För T får vi ekvationen $T' = -k[(2n - 1)\pi/(2\ell)]^2 T$, med lösningar proportionella mot $\exp\left(- (2n - 1)^2 \frac{k\pi^2}{4\ell^2} t\right)$. Nu kan

vi ansätta

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-(2n-1)^2 \frac{k\pi^2}{4\ell^2} t} \cos(2n-1) \frac{\pi}{2\ell} x.$$

Initialvärdet säger att vi skall ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2n-1) \frac{\pi}{2\ell} x = \ell - x$$

för $0 < x < \ell$. Detta innebär en utveckling av högerledet i det nyss nämnda ortogonalsystemet, som vi hittar på vanligt sätt. Först ser vi genom att räkna ut en integral att

$$\left\| \cos(2n-1) \frac{\pi}{2\ell} x \right\|^2 = \frac{\ell}{2},$$

där normen tas i $L^2(0, \ell)$. Därför blir koefficienterna

$$a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} (\ell - x) \cos(2n-1) \frac{\pi}{2\ell} x dx = \frac{8\ell}{(2n-1)^2 \pi^2},$$

det sista via en partialintegration. Lösningen är alltså

$$u(x, t) = \frac{8\ell}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} e^{-(2n-1)^2 \frac{k\pi^2}{4\ell^2} t} \cos(2n-1) \frac{\pi}{2\ell} x.$$

Anm. 1. I stället för att räkna ut koefficienterna a_n kan man få dem ur BETA 13.1 (6), med $L = h = 2\ell$.

Anm. 2. Det går också att lösa detta problem genom Laplace-transformation i t -variabeln, men det leder till en rätt besvärlig invers Laplacetransform.

Uppgift 3.

Med kursbokens definition av den diskreta Fouriertransformationen får man

$$\hat{a}_m = \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n e^{-2\pi i \frac{nm}{N}}$$

för $m \in \{0, 1, \dots, N-1\}$. Detta är en ändlig geometrisk serie, med kvot $-e^{-2\pi im/N}$. Eftersom N är udda, är $-e^{-2\pi im/N} \neq$

1 för alla dessa m , så den vanliga formeln för ändliga geometriska serier kan användas. Man får

$$\hat{a}_m = \frac{1 - (-1)^N e^{-2\pi im}}{1 + e^{-2\pi im/N}} = \frac{2}{1 + e^{-2\pi im/N}} = \frac{e^{\pi im/N}}{\cos \frac{\pi m}{N}}.$$

Parsevals formel $\sum |\hat{a}_m|^2 = N \sum |a_n|^2$ medför nu

$$\sum_{m=0}^{N-1} \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi m}{N}} = N \sum_{n=0}^{N-1} 1 = N^2.$$

Anm. Som kontroll kan man lätt verifiera denna formel för $N = 3$. Då blir summan

$$1 + \frac{1}{(1/2)^2} + \frac{1}{(-1/2)^2} = 9.$$

Uppgift 4.

Detta är en inhomogen variant av vågekvationen, men både rand- och initialvillkoren är homogena. Steady state-metoden kan inte användas eftersom den inhomogena termen $(1-x)t$ beror av t . Därför skall vi ansätta en Fourierserie i x -variabeln med okända t -beroende koefficienter (teknik 2). Om vi hade den homogena vågekvationen med dessa randvillkor, skulle de separabla lösningarna ha x -beroende faktorer $\sin n\pi x$, $n = 1, 2, \dots$, som ju har rätt randvärden. Vi antar alltså

$$(1) \quad u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin n\pi x.$$

Insatt i den partiella differentialekvationen ger detta

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n''(t) \sin n\pi x + \sum_{n=1}^{\infty} c^2 n^2 \pi^2 a_n(t) \sin n\pi x = (1-x)t.$$

För att utveckla högerledet i sinusserie i x -variabeln använder vi BETA 13.1 (5) med $L = h = 1$ och får

$$(1-x)t = \frac{2}{\pi} t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin n\pi x.$$

Identifiering av koefficienter ger då att för varje n

$$a_n''(t) + c^2 n^2 \pi^2 a_n(t) = \frac{2}{\pi n} t.$$

De givna initialvillkoren betyder att summan i (1) ska bli 0 för $t = 0$, även efter en derivation i t . Det medför $a_n(0) = a_n'(0) = 0$. Vi har en inhomogen ordinär differentialekvation. Motsvarande homogena ekvation har den allmänna lösningen $A_n \cos cn\pi t + B_n \sin cn\pi t$. Som partikulärlösning kan man ansätta ett förstgradspolynom, eller bara konst $\cdot t$, och få $\frac{2}{\pi^3 c^2 n^3} t$. Genom att addera homogen- och partikulärlösningarna och välja A_n och B_n så att startvärdena blir rätt finner man

$$a_n(t) = \frac{2}{\pi^3 c^2 n^3} \left(t - \frac{1}{cn\pi} \sin cn\pi t \right).$$

Problemet lösning är alltså

$$u(x, t) = \frac{2}{\pi^3 c^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \left(t - \frac{1}{cn\pi} \sin cn\pi t \right) \sin n\pi x.$$

Anm. 1. En annan, listig metod är att i stället för en steady state-lösning bestämma en lösning till differentialekvationen av formen $u_0(x, t) = f(x)t$ som också uppfyller randvillkoren. Man finner att $f(x)$ blir ett tredjegradspolynom. Sedan söker man v , där $u = v + u_0$. Då kommer v att uppfylla den homogena vågekvationen, ha randvärden 0 och initialvärden $v(x, 0) = 0$ och $v_t(x, 0) = -f(x)$. Därför kan v bestämmas med variabelseparation.

Anm. 2. Det går också att lösa problemet genom Laplace-transformation i t -variabeln. Om alltså $U(x, s) = \mathcal{L}u$ blir den transformerade ekvationen

$$s^2 U(x, s) = c^2 U_{xx}(x, s) + \frac{1-x}{s^2},$$

där vi utnyttjade att $u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0$ och Laplace-transformerade termen $(1-x)t$. För fixt s är detta en ordinär differentialekvation i x -variabeln. En partikulärlösning ges av $U(x, s) = (1-x)/s^4$, och lösningarna till motsvarande homogena ekvation är linjärkombinationer av $e^{sx/c}$ och $e^{-sx/c}$.

Vi söker därför en lösning av formen

$$U(x, s) = \frac{1-x}{s^4} + Ae^{sx/c} + Be^{-sx/c},$$

där A och B får bero av s men inte av x . Dessutom skall U uppfylla randvillkoren vid $x = 0$ och $x = 1$, alltså $U(0, s) = U(1, s) = 0$. Man finner att

$$A = \frac{1}{s^4} \frac{e^{-2s/c}}{1 - e^{-2s/c}}, \quad B = -\frac{1}{s^4} \frac{1}{1 - e^{-2s/c}},$$

så att

$$U(x, s) = \frac{1-x}{s^4} + \frac{1}{s^4} \frac{e^{-s(2-x)/c}}{1 - e^{-2s/c}} - \frac{1}{s^4} \frac{e^{-sx/c}}{1 - e^{-2s/c}}.$$

För att finna den inversa Laplacetransformen av detta utvecklar vi $1/(1 - e^{-2s/c})$ i geometrisk serie och får

$$U(x, s) = \frac{1-x}{s^4} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{s^4} e^{-s(2n+2-x)/c} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{s^4} e^{-s(2n+x)/c}.$$

(Samma teknik används på sidan 282 i Folland.) Enligt tabell är $1/s^4$ Laplacetransformen av $t^3/6$. För $a > 0$ är därmed e^{-as}/s^4 Laplacetransformen av $(t-a)_+^3/6$, där vi med $(t-a)_+^3$ menar $(t-a)^3$ för $t > a$ och 0 för $t < a$. Därför får man

$$u(x, t) = \frac{1}{6} \left[(1-x)t^3 + \sum_{n=0}^{\infty} \left(t - \frac{2n+2-x}{c} \right)_+^3 - \sum_{n=0}^{\infty} \left(t - \frac{2n+x}{c} \right)_+^3 \right].$$

Detta är en annan framställning av samma lösning som vi fann ovan.

Uppgift 5.

Om $\lambda < 0$, sätter vi $\lambda = -\mu^2$ med $\mu > 0$. Den allmänna lösningen till ekvationen $f'' + \lambda f = 0$ är då $f(x) = a \cosh \mu x + b \sinh \mu x$. Randvillkoret i 0 leder till $a = 0$ och $f(x) = \sinh \mu x$. Nu ger randvillkoret i punkten 2 att

$$2\mu \cosh 2\mu = \sinh 2\mu$$

eller ekvivalent

$$\tanh 2\mu = 2\mu.$$

Denna ekvation har ingen lösning med $\mu > 0$, av följande skäl. De två kurvorna tangerar varandra i origo, och eftersom derivatan av $\tanh 2\mu$ är $2/\cosh^2 2\mu < 2$ för $\mu > 0$ har de ingen skärningspunkt där $\mu > 0$ (rita en graf).

Om $\lambda = 0$ blir lösningarna till ekvationen $f'' + \lambda f = 0$ förstgradspolynom, och randvillkoret i 0 leder till $f(x) = x$. Man konstaterar att funktionen $f(x) = x$ uppfyller randvillkoret i punkten 2. Den är alltså en egenfunktion, och 0 är ett egenvärde, som är mindre än 9.

Om $\lambda > 0$, skriv $\lambda = \nu^2$ med $\nu > 0$. Den allmänna lösningen ges nu av $f(x) = a \cos \nu x + b \sin \nu x$. Randvillkoret i 0 ger $a = 0$ så att bara $f(x) = \sin \nu x$ återstår. Randvillkoret i 2 medför analogt med ovanstående

$$\tan 2\nu = 2\nu.$$

Vi vill nu bestämma antalet egenvärden med $0 < \lambda < 9$, eller ekvivalent antalet lösningar till denna ekvation med $0 < \nu < 3$. För att (av bekvämlighetsskäl) få den vanliga tangenskurvan, sätter vi $2\nu = \nu'$ och söker i stället lösningar till ekvationen

$$\tan \nu' = \nu'$$

med $0 < \nu' < 6$. Återigen ser vi att de två kurvorna tangerar varandra i origo och att linjen nu ligger under den gren av tangenskurvan som ges av $0 < \nu' < \pi/2$. Men den skär alla övriga grenar i $\nu' > 0$. (Rita en graf.) Nästa gren av tangenskurvan har sin positiva del i intervallet $\pi < \nu' < 3\pi/2$ så den ger en skärningspunkt med $\nu' < 6$. Men den därpå följande grenen blir positiv först då $\nu' > 2\pi > 6$. Därmed har vi bara en skärningspunkt i $0 < \nu' < 6$.

Sammanfattningsvis finner vi att det finns två egenvärden med $\lambda < 9$.

Uppgift 6.

Vi använder cylindriska koordinater r, θ, z . Eftersom randvärdena är oberoende av θ , gäller detsamma om lösningen, som vi skriver $u(r, z)$. Randvillkoren är då $u(r, 0) = u(r, 1) = 0$ och $u(R_0, z) = \sin \pi z/2$.

Ekvationen blir

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + u_{zz} = 0.$$

Vi separerar variabler genom $u = R(r)Z(z)$ och får

$$\frac{R'' + r^{-1}R'}{R} = -\frac{Z''}{Z} = \lambda$$

för någon konstant λ . Randvillkoren medför $Z(0) = Z(1) = 0$. Då vet man att de enda möjligheterna för Z är att $\lambda = (n\pi)^2$ och $Z(z) = \sin n\pi z$, där n är ett naturligt tal. För R får vi därför ekvationen

$$r^2 R'' + rR' - (n\pi)^2 r^2 R = 0.$$

Detta är μ -versionen av den modifierade Besselekvationen, med ν -värde 0 och $\mu = n\pi$. Lösningarna är linjärkombinationer av $I_0(n\pi r)$ och $K_0(n\pi r)$. Eftersom R skall vara begränsad vid $r = 0$, förkastas K_0 .

De separerade lösningarna är därför $I_0(n\pi r) \sin n\pi z$, där $n = 1, 2, \dots$. Då antar vi

$$u(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n I_0(n\pi r) \sin n\pi z.$$

Randvillkoret för $r = R_0$ blir nu

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n I_0(n\pi R_0) \sin n\pi z = \sin \frac{\pi z}{2}.$$

Vi måste alltså utveckla funktionen i högerledet i sinusserie. Det enklaste är att använda BETA 13.1 (16) med $\alpha = 1/2$, som säger att

$$\sin \frac{t}{2} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n^2 - 1/4} \sin nt, \quad 0 < t < \pi.$$

Med $t = \pi z$ får vi då

$$\sin \frac{\pi z}{2} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n^2 - 1/4} \sin n\pi z, \quad 0 < z < 1.$$

Detta ger

$$a_n = \frac{8}{\pi} \frac{(-1)^{n+1} n}{(4n^2 - 1) I_0(n\pi R_0)}.$$

Lösningen till problemet är därför

$$u(r, z) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{(4n^2 - 1) I_0(n\pi R_0)} I_0(n\pi r) \sin n\pi z.$$

Kommentar till teoriuppgift 8.

Låt rektangeln vara given av $a < x < b$, $c < y < d$. Man kan finna en steady state-lösning $u_0(x)$ som uppfyller $Lu_0(x) = F(x)$. Men det går i allmänhet inte att också få u_0 att uppfylla randvillkoren på rektangelsidorna $x = a$ och $x = b$, eftersom dessa villkor beror av y och alltså varierar längs rektangelsidorna. Om man nu skriver $u(x, y) = v(x, y) + u_0(x)$, skall v uppfylla den homogena ekvationen $Lv = 0$ i rektangeln, och v skall satisfiera (inhomogena) randvillkor på de fyra rektangelsidorna. Med superposition kan man sedan dela upp v i två funktioner som uppfyller homogena randvillkor för $x = a$ och $x = b$ resp. för $y = c$ och $y = d$. Dessa två funktioner kan bestämmas med variabelseparation.

En variant av detta består i att börja med superposition och skriva u som en summa $u = v + w$, där $Lv = F$ och v skall uppfylla homogena randvillkor för $x = a$ och $x = b$, och samma randvillkor som u för $y = c$ och $y = d$. För funktionen w får man då $Lw = 0$ samt homogena randvillkor för $y = c$ och $y = d$. För att finna v kan man finna en steady state-lösning $v_0(x)$ som uppfyller $Lv_0 = F$ och de homogena randvillkoren för $x = a$ och $x = b$. Sedan bestämmer man $v - v_0$ med variabelseparation. Även w fås med variabelseparation.