MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers

Datum: 2013-01-15
Telefon: Peter Sjögren
7723511 eller 0706-242748
Skrivtid: 14.00 - 19.00

Tentamen i Fourieranalys MVE030 för F2 och Kf2 och Fouriermetoder MVE290 för TM2

Hjälpmedel: Godkänd räknedosa, BETA samt "Några tips om Fourierserier m.m. i BETA" (två sidor).
Maxpoäng står inom parentes efter varje uppgift, med summa 60.

1. Beräkna
$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)\, e^{-|\xi|}\, d\xi,$$
där funktionen f definieras av att $f(x) = \frac{1}{x^2}$ för $x > 2$ och $f(x) = 0$ för $x \le 2$. (8)

2. Lös följande problem, där $u = u(x,t)$ och $k, \ell > 0$ är konstanter:
$$\begin{cases} u_t = k u_{xx}, & 0 < x < \ell,\ t > 0 \\ u(0,t) = 0,\ u_x(\ell,t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = x, & 0 < x < \ell. \end{cases}$$
(8)

3. Bestäm det polynom P av grad högst 3 som minimerar
$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|\sqrt{|x|} - P(x)\right|^2 e^{-2x^2}\, dx.$$
(8)

4. Hitta en lösning till problemet
$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - 4u_x, & 0 < x < \pi,\ t > 0, \\ u(0,t) = 0,\ \ u(\pi,t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = 1,\ \ u_t(x,0) = 0, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$
(8)

5. Bestäm för $x > 0$ integralen

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ix\sin\varphi}\,\sin^2\varphi\,d\varphi,$$

exempelvis med hjälp av Besselfunktionernas genererande funktion. (8)

6. Lös följande randvärdesproblem i rektangeln $[0, L] \times [0, \ell]$:

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 1, & 0 < x < L,\ 0 < y < \ell, \\ u(x,0) = 1,\ u(x,\ell) = x, & 0 < x < L, \\ u_x(0,y) = 0,\ u_x(L,y) = 0, & 0 < y < \ell. \end{cases}$$

(8)

7. Definiera ett reguljärt Sturm-Liouville-problem. (6)

8. (a) Vad innebär det att ett linjärt dynamiskt system är tidsinvariant?
(b) Ange ett samband mellan sådan tidsinvarians och faltning.
(c) Vad betyder det att systemet är kausalt, och hur hänger det ihop med faltning? (2+2+2)

MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers Datum: 2013-01-15

LÖSNINGAR TILL tentamen i Fourieranalys MVE030 för F2 och Kf2 och Fouriermetoder MVE290 för TM2

Uppgift 1.
Vi vill använda Plancherels formel, och observerar att $e^{-|\xi|}$ är Fouriertransformen av funktionen $\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$, enligt BETA 13.2 F41b. Då ger Plancherel

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)\, e^{-|\xi|}\, d\xi = \frac{2\pi}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{1}{1+x^2}\, dx = 2 \int_{2}^{\infty} \frac{1}{x^2(1+x^2)}\, dx.$$

Den sista integranden partialbråksuppdelar vi och får

$$2 \int_{2}^{\infty} \frac{1}{x^2(1+x^2)}\, dx = 2 \int_{2}^{\infty} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2} \right) dx$$
$$= 2 \left[-\frac{1}{x} - \arctan x \right]_2^{\infty} = 1 - \pi + 2\arctan 2.$$

Denna primitiva funktion kan man också hitta i BETA 7.4, 71. Svaret blir alltså $1 - \pi + 2\arctan 2 \approx 0.0727$.

Uppgift 2.
Detta är värmeledningsekvationen med homogena randvillkor, så man kan variabelseparera direkt. Därför söker vi de separerade lösningarna $X(x)T(t)$ till värmeledningsekvationen med randvillkoren. Som vanligt får man att

$$\frac{1}{k}\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda$$

måste vara konstant, och randvillkoren ger $X(0) = 0$ och $X'(\ell) = 0$.

Om $\lambda > 0$, säg $\lambda = \mu^2$, ger $X''(x) = \mu^2 X(x)$ att $X(x) = a\cosh \mu x + b \sinh \mu x$. Men randvillkoren leder då till $a = 0$ och $b = 0$, så detta fall ger inget utöver nollösningen. Om $\lambda = 0$, får vi $X(x) = a + bx$ som kan avfärdas på samma sätt. Då återstår fallet $\lambda = -\mu^2 < 0$, där vi tar $\mu > 0$. Man får $X(x) = a\cos\mu x + b\sin\mu x$ och randvillkoren ger att $a = 0$ och att $b\mu\cos\mu\ell = 0$. Det följer att $\mu = (n-\frac{1}{2})\frac{\pi}{\ell}$ för något $n \in \{1, 2, \ldots\}$.

Ekvationen för T är $T'(t) = k\lambda T(t)$, och eftersom $\lambda = -\mu^2$ blir $T(t)$ proportionell mot $\exp\left(-k\left((n-\frac{1}{2})\frac{\pi}{\ell}\right)^2 t\right)$.

De separerade lösningarna är alltså multipler av

$$\sin\frac{(n-\frac{1}{2})\pi x}{\ell}\, e^{-k\left((n-\frac{1}{2})\frac{\pi}{\ell}\right)^2 t}, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

För att finna en lösning till hela det givna problemet ansätter vi en summa av separerade lösningar:

$$u(x,t) = \sum_1^\infty a_n \sin\frac{(n-\frac{1}{2})\pi x}{\ell}\, e^{-k\left((n-\frac{1}{2})\frac{\pi}{\ell}\right)^2 t}. \tag{1}$$

Initialvillkoret leder då till

$$\sum_1^\infty a_n \sin\frac{(n-\frac{1}{2})\pi x}{\ell} = x, \qquad 0 < x < \pi.$$

Vi vet att sinusfunktionerna i denna summa bildar ett fullständigt ortogonalsystem på intervallet $(0, \pi)$, eftersom de är egenfunktionerna till ett reguljärt Sturm-Liouville-problem. Deras L^2-normer är kvadratroten ur

$$\int_0^\ell \sin^2\frac{(n-\frac{1}{2})\pi x}{\ell}\,dx = \frac{\ell}{2}.$$

Därför ges koefficienterna av

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\ell}\int_0^\ell x\sin\frac{(n-\frac{1}{2})\pi x}{\ell}\,dx = [\text{partialintegration}] \\
&= \frac{2}{\ell}\left[-x\frac{\cos\frac{(n-\frac{1}{2})\pi x}{\ell}}{(n-\frac{1}{2})\pi/\ell}\right]_0^\ell + \frac{2}{\ell}\int_0^\ell \frac{\cos\frac{(n-\frac{1}{2})\pi x}{\ell}}{(n-\frac{1}{2})\pi/\ell}\,dx \\
&= 0 + \frac{2}{\ell}\frac{1}{((n-\frac{1}{2})\pi/\ell)^2}\left[\sin\frac{(n-\frac{1}{2})\pi x}{\ell}\right]_0^\ell \\
&= \frac{8\ell(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2\pi^2}.
\end{aligned}$$

Varning: BETA 13.1 (12) ger en utveckling av funktionen x i sinusserie, nämligen

$$x = \frac{2L}{\pi} \sum_1^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin \frac{n\pi x}{L}, \qquad |x| < L.$$

Om man här sätter $L = 2\ell$, får man en utveckling som liknar den vi söker. Men eftersom vi skall ha $(2n-1)\pi/(2\ell)$ som argument för sinusfunktionen, dvs. bara udda n-värden i ovanstående formel, kan vi *inte* använda detta för att finna koefficienterna a_n.

Däremot går det att få fram a_n genom att manipulera med serien för $f_2(x) = |x|$, men ovanstående räkning är nog enklare.

Svaret på uppgiften är (1) med a_n som ovan.

Uppgift 3.

Genom transformationen $t = x\sqrt{2}$ blir problemet i stället att minimera

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \left| 2^{-1/4}\sqrt{|t|} - Q(t) \right|^2 e^{-t^2}\, dt,$$

där $Q(t) = P(x) = P(t/\sqrt{2})$ liksom P är ett polynom av grad högst 3. Fördelen med denna omskrivning är att vi får vikten e^{-t^2}, och vi vet att Hermitepolynomen $(H_n)_0^\infty$ bildar en ortogonalbas i L^2 med denna vikt. Satsen om bästa approximation säger därför att

$$Q(t) = \sum_0^3 c_n H_n(t),$$

där

$$c_n = \frac{1}{\|H_n\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} 2^{-1/4}\sqrt{|t|} H_n(t) e^{-t^2}\, dt,$$

med normen tagen i det viktade L^2-rummet. Enligt BETA 12.2 sidan 266 är $\|H_n\|^2 = n! 2^n \sqrt{\pi}$. Eftersom H_n har samma paritet (udda – jämnt) som n, ser vi att c_n blir 0 för udda n. Vi har alltså bara c_0 och c_2 att räkna ut. Eftersom $H_0 = 1$ får man

$$c_0 = \frac{2^{-1/4}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{|t|} e^{-t^2}\, dt = \frac{2^{-1/4}}{\sqrt{\pi}} 2 \int_0^{\infty} \sqrt{t} e^{-t^2}\, dt.$$

Den sista integralen här kan man hitta i BETA 7.5 (42) (där behöver parametern n inte vara heltal):

$$\int_0^{\infty} \sqrt{t} e^{-t^2}\, dt = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right).$$

Det är inte överraskande att Γ-funktionen dyker upp här, för ett alternativ är att variabeltransformera $s = t^2$ och komma till den integral som definierar Γ-funktionen. Alltså är

$$c_0 = \frac{2^{-1/4}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right).$$

Enligt tabellen är $H_2(t) = 4t^2 - 2$, så

$$c_2 = \frac{2^{-1/4}}{8\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{|t|}(4t^2-2) e^{-t^2}\, dt = \frac{2^{-1/4}}{4\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \sqrt{t}(4t^2-2) e^{-t^2}\, dt.$$

Samma tabellrad som nyss ger att

$$c_2 = \frac{2^{-1/4}}{4\sqrt{\pi}}\left(2\Gamma\left(\frac{7}{4}\right) - \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\right).$$

För att hyfsa detta kan man utnyttja rekursionsformeln för Γ-funktionen, som ger att $\Gamma\left(\frac{7}{4}\right) = \frac{3}{4}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)$. Då fås

$$c_2 = \frac{2^{-1/4}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\frac{1}{8}.$$

Om man nu stoppar in uttrycken för c_n och H_n i formeln för Q, får man

$$Q(t) = \frac{2^{-1/4}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{t^2}{2} + \frac{3}{4}\right).$$

Det återstår bara att transformera tillbaks till x för att få det sökta polynomet P:

$$P(x) = Q(x\sqrt{2}) = \frac{2^{-1/4}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\left(x^2 + \frac{3}{4}\right).$$

Uppgift 4.
Både differentialekvationen och randvillkoren är homogena, så det är bäddat för variabelseparation. Om $u(x,t) = X(x)T(t)$ får man på vanligt sätt att

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x) - 4X'(x)}{X(x)}$$

och denna kvantitet måste vara konstant, säg λ. För X har man alltså den ordinära, linjära differentialekvationen $X''(x) - 4X'(x) - \lambda X(x) = 0$, vars karakteristiska ekvation $r^2 - 4r - \lambda = 0$ har lösningar $r = 2 \pm \sqrt{4+\lambda}$. Randvillkoren ger att $X(0) = 0$ och $X(\pi) = 0$. Lösningarnas utseende beror av vilket tecken $4 + \lambda$ har.

Om $4 + \lambda > 0$, säg $4 + \lambda = \mu^2$ med $\mu > 0$, blir lösningarna till den ordinära differentialekvationen $X(x) = ae^{(2+\mu)x} + be^{(2-\mu)x}$. Randvillkoren innebär då att $a + b = 0$ och $ae^{(2+\mu)\pi} + be^{(2-\mu)\pi} = 0$, vilket, som man lätt ser, medför $a = b = 0$. (Detta blir en aning enklare om man skriver lösningarna som $e^{2x}(a' \cosh \mu x + b' \sinh \mu x)$.) Vi får alltså bara den ointressanta nollösningen i detta fall.

Om $4 + \lambda = 0$ har den karakteristiska ekvationen dubbelrot, och den ordinära differentialekvationen har lösningarna $X(x) = ae^{2x} + bxe^{2x}$. Då medför randvillkoren igen att $a = b = 0$.

Om slutligen $4 + \lambda < 0$, sätter vi $4 + \lambda = -\mu^2$ där $\mu > 0$. Den ordinära differentialekvationen löses nu av $X(x) = e^{2x}(a \cos \mu x + b \sin \mu x)$, och randvillkoren ger $a = 0$ och, eftersom både a och b inte får vara 0, också $\sin \mu\pi = 0$. Därför måste μ vara heltal, så att $\mu \in \{1, 2, \dots\}$.

För T har vi ekvationen $T''(t) = \lambda T(t)$, dvs. $T''(t) = -(4 + \mu^2)T(t)$, med lösningar

$$T(t) = \alpha \cos \sqrt{4+\mu^2}\, t + \beta \sin \sqrt{4+\mu^2}\, t.$$

Vi har därmed funnit de separabla lösningarna

$$e^{2x} \sin \mu x \left(\alpha \cos x\sqrt{4+\mu^2}\, t + \beta \sin \sqrt{4+\mu^2}\, t \right), \quad \mu = 1, 2, \dots.$$

För den sökta funktionen u blir ansatsen

(2) $u(x,t) =$

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} e^{2x}\sin\mu x\left(\alpha_\mu\cos\sqrt{4+\mu^2}\,t+\beta_\mu\sin\sqrt{4+\mu^2}\,t\right).$$

Nu utnyttjar vi initialvillkoren, som ger

$$\sum_{\mu=1}^{\infty}\alpha_\mu\, e^{2x}\sin\mu x = 1$$

och

$$\sum_{\mu=1}^{\infty}\sqrt{4+\mu^2}\,\beta_\mu e^{2x}\sin\mu x = 0,$$

bådadera för alla $0 < x < \pi$. Detta är Fourierserieutvecklingar, och vi ser genast att alla β_μ måste vara 0 och att α_μ är koefficienterna för funktionen e^{-2x}, utvecklad i sinusserie i $(0,\pi)$. Därför är

$$\begin{aligned}\alpha_\mu &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi e^{-2x}\sin\mu x\,dx\\ &= \frac{2}{\pi}\operatorname{Im}\int_0^\pi e^{(-2+i\mu)x}\,dx = \frac{2}{\pi}\operatorname{Im}\frac{(-1)^\mu e^{-2\pi}-1}{-2+i\mu}\\ &= \frac{2}{\pi}\operatorname{Im}\frac{((-1)^\mu e^{-2\pi}-1)(-2-i\mu)}{4+\mu^2} = \frac{2\mu}{\pi}\,\frac{(1-(-1)^\mu e^{-2\pi})}{4+\mu^2}.\end{aligned}$$

Lösningen vi söker blir alltså (2) med dessa α_μ.

Anm. Ett annat sätt att räkna ut α_μ är att partialintegrera två gånger. Då kommer man tillbaka till integralen man startade med, med en koefficient $\neq 1$. Men det enklaste är att hitta den primitiva funktionen i BETA 7.4 330.

Uppgift 5.
Vi utgår från formeln

$$e^{ix\sin\varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)e^{in\varphi},$$

se BETA 12.4 sidan 274. Den gäller för $x > 0$ och alla reella φ. För varje fixt x är högerledet en Fourierserie, som måste vara den komplexa Fourierserien för funktionen $\varphi \mapsto e^{ix\sin\varphi}$ i vänsterledet. Därför ges koefficienterna $J_n(x)$ av den vanliga formeln

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ix\sin\varphi}e^{-in\varphi}\,d\varphi. \tag{3}$$

Denna formel kan man också få från sidan 270 i BETA 12.4. I den givna integralen gör vi omskrivningen

$$\sin^2\varphi = \frac{1}{2}(1-\cos 2\varphi) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^{2i\varphi} - \frac{1}{4}e^{-2i\varphi}.$$

Den givna integralen kan därför fås med hjälp av tre integraler av typ (3), utom att vi har ett minustecken i exponenten framför $ix\sin\varphi$. Men det minustecknet ändrar bara tecknet framför integralens imaginärdel som är

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x\sin\varphi)\sin^2\varphi\,d\varphi,$$

och detta är 0 eftersom integranden här är udda. Det betyder att minustecknet i exponenten inte har någon betydelse och kan strykas. Därför ger (3)

$$\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ix\sin\varphi}\sin^2\varphi\,d\varphi \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ix\sin\varphi}\,d\varphi - \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ix\sin\varphi}e^{2i\varphi}\,d\varphi - \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ix\sin\varphi}e^{-2i\varphi}\,d\varphi \\
&\qquad = \pi J_0(x) - \frac{\pi}{2}\,J_{-2}(x) - \frac{\pi}{2}\,J_2(x).
\end{aligned}$$

Men $J_{-2}(x) = J_2(x)$, se BETA 12.4 sidan 270, så

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ix\sin\varphi}\sin^2\varphi\,d\varphi = \pi J_0(x) - \pi J_2(x),$$

som är svaret.

En liten variant av ovanstående är att skriva om Fourierserien för $e^{ix\sin\varphi}$ som en sinus-cosinus-serie, och sen arbeta med sådana serier.

Uppgift 6.
Högerledet 1 gör ekvationen $\Delta u = 1$ inhomogen. Eftersom 1 är oberoende av båda variablerna, kan man använda steady state-metoden, alltså först finna en lösning u_0 till ekvationen som är oberoende av den ena variabeln. Den "ena variabeln" brukar vara tiden t, därav uttrycket. Men i detta fall kan vi välja x eller y. Vi väljer x, så att u_0 blir en funktion av enbart y. Det ger ekvationen $u_0''(y) = 1$, med lösningar $u_0(y) = y^2/2 + ay + b$.

I allmänhet vill man också att en sådan steady-state-lösning $u_0(y)$ skall uppfylla randvillkoren i ändpunkterna av y-intervallet. Här kan vi klara det ena, $u_0(0) = 1$, genom att välja $b = 1$, men att få $u_0(\ell) = x$ för alla $0 < x < L$ går förstås inte. Lägg också märke till att x-derivatan $(u_0)_x$ är 0, så att varje sådan lösning uppfyller randvillkoren för $x = 0$ och $x = L$. För koefficienten a har vi fritt val och väljer enklast $a = 0$, så att $u_0(y) = y^2/2 + 1$.

För $v(x,y) = u(x,y) - u_0(y)$ får vi

$$\begin{cases} \Delta v = 0, & 0 < x < L,\ 0 < y < \ell, \\ v(x,0) = 0,\ \ v(x,\ell) = x - \ell^2/2 - 1, & 0 < x < L, \\ v_x(0,y) = 0,\ \ v_x(L,y) = 0, & 0 < y < \ell. \end{cases}$$

Nu har vi ett standardproblem, en homogen ekvation med homogena randvillkor för $x = 0$ och $x = L$. Därför separerar vi variablerna och söker lösningar av formen $v(x,y) = X(x)Y(y)$, vilket som vanligt ger

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda,$$

för någon konstant λ. De homogena randvillkoren gör att vi börjar med X, och vi får ekvationen $X''(x) = \lambda X(x)$ med $X'(0) = X'(L) = 0$. I denna välkända situation vet vi att enda möjligheten är att $\lambda = -(n\pi/L)^2$ och $X(x)$ är en multipel av $\cos\frac{n\pi x}{L}$, för något $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$.

Ekvationen för $Y(y)$ blir då $Y''(y) = (n\pi/L)^2 Y(y)$. För $n > 0$ måste därför $Y(y)$ vara en linjärkombination av $\sinh\frac{n\pi y}{L}$ och $\cosh\frac{n\pi y}{L}$. Randvillkoret $v(x,0) = 0$ ger $Y(0) = 0$, så någon cosh-term finns inte. För $n = 0$ får vi i stället att Y måste vara ett förstagradspolynom, och på grund av samma randvillkor i själva verket en multipel av y.

Som separerade lösningar får vi alltså $1 \cdot y$ och $\cos\frac{n\pi x}{L}\sinh\frac{n\pi y}{L}$, $n = 1, 2, \ldots$.. Vi ansätter därför

$$v(x,y) = b_0 y + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos\frac{n\pi x}{L}\sinh\frac{n\pi y}{L}.$$

Det återstående randvillkoret $v(x,\ell) = x - \ell^2/2 - 1$ säger då att

$$b_0\ell + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos\frac{n\pi x}{L}\sinh\frac{n\pi\ell}{L} = x - \frac{\ell^2}{2} - 1.$$

Vi utvecklar därför funktionen x i cosinusserie i intervallet $(0, L)$. BETA 13.1 (3) med $\alpha = 1$ och $h = 1$ ger

$$x = \frac{L}{2} - \frac{4L}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{L}.$$

Det återstår bara att identifiera koefficienter. För den konstanta termen får man $b_0\ell = L/2 - \ell^2/2 - 1$, dvs.

$$b_0 = \frac{L-2}{2\ell} - \frac{\ell}{2}.$$

För $n \geq 1$ blir $b_{2n} = 0$ och

$$b_{2n-1} = -\frac{4L}{\pi^2}\frac{1}{(2n-1)^2\sinh\frac{(2n-1)\pi\ell}{L}}.$$

Vi kan sammanfatta i en formel för den sökta lösningen $u = v + u_0$:

$$u(x,y) =$$

$$\frac{y^2}{2} + \left(\frac{L-2}{2\ell} - \frac{\ell}{2}\right)y + 1 - \frac{4L}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{(2n-1)\pi x}{L}\sinh\frac{(2n-1)\pi y}{L}}{(2n-1)^2\sinh\frac{(2n-1)\pi\ell}{L}}.$$