MVE031 – Fourieranalys

Satser med bevis 2012

Sammanställt av: David Frisk, 2013

Konvergenssatsen för Fourierserier

Sats: Antag att f är 2π-periodisk och styckvis glatt i $[-\pi,\pi]$. Då konvergerar $S_N(\theta)$ för varje θ. Gränsvärdet är $f(\theta)$ om f är kontinuerlig i θ, annars är gränsvärdet $\frac{1}{2}(f(\theta+)+f(\theta-))$.

Bevis: (Kontinuitetsfallet). Antag f är kontinuerlig i $\theta=\theta_0$.

Sätt $g(\theta) = \dfrac{f(\theta)-f(\theta_0)}{e^{i\theta}-e^{i\theta_0}}$, $\theta\neq\theta_0$. Utanför θ_0 är $g(\theta)$ glatt.

Påstående: $g(\theta)$ har hö- och vä- gränsvärden i θ_0, ty

$$g(\theta) = \underbrace{\frac{f(\theta)-f(\theta_0)}{\theta-\theta_0}}_{=f'(\xi) \text{ enl. MVS, } \xi\in[\theta,\theta_0]} \cdot \underbrace{\frac{\theta-\theta_0}{e^{i\theta}-e^{i\theta_0}}}_{\frac{1}{\frac{d}{d\theta}e^{i\theta}\big|_{\theta=\theta_0}}}$$

Då $\theta\to\theta_0$ från vä eller hö, går $f'(\xi)$ mot $f'(\theta_0-)$ resp $f'(\theta_0+)$

Påståendet visat. Då är g styckvis kontinuerlig och Riemann-Lebesgues lemma ger att $c_n(g)\to 0$, $n\to\pm\infty$

$$f(\theta) = f(\theta_0) + e^{i\theta}g(\theta) - e^{i\theta_0}g(\theta)$$

$$\Rightarrow c_n(f) = f(\theta_0)\delta_{n0} + c_n(e^{i\theta}g(\theta)) - c_n(e^{i\theta_0}g(\theta)), \quad \text{där}$$

$$c_n(e^{i\theta}g(\theta)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\theta}g(\theta)e^{-in\theta}\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\theta)e^{-i(n-1)\theta}\,d\theta = c_{n-1}(g)$$

$$S_N(\theta) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e^{in\theta} = f(\theta_0) + \sum_{n=-N}^{N} c_{n-1}(g)e^{in\theta} - \sum_{n=-N}^{N} e^{i\theta_0}c_n(g)e^{in\theta}$$

$$S_N(\theta_0) = f(\theta_0) + \sum_{n=-N}^{N} c_{n-1}(g)e^{in\theta_0} - \sum_{n=-N}^{N} e^{i\theta_0}c_n(g)e^{in\theta_0} = \{\text{Sätt } n'=n-1 \text{ i 1:a summan}\} =$$

$$= f(\theta_0) + \sum_{n'=-N-1}^{N-1} c_{n'}(g)e^{i(n'+1)\theta_0} - \sum_{n=-N}^{N} c_n(g)e^{i(n+1)\theta_0} =$$

$$= f(\theta_0) + c_{-N-1}(g)e^{-iN\theta_0} - c_N(g)e^{i(N+1)\theta_0} \xrightarrow{N\to\infty} f(\theta_0),$$

eftersom $c_n(g)\to 0$, $n\to\pm\infty$.

$\boxtimes$

David Frisk

Termvis derivering av Fourierserier

Sats. Om f är 2π-periodisk, styckvis glatt och kontinuerlig, med Fourierserie
$f = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta}$ alt $f = \sum_{1}^{\infty} a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta$, så är
$f' = \sum_{-\infty}^{\infty} in c_n e^{in\theta}$ alt $f' = \sum_{1}^{\infty} n b_n \cos n\theta - n a_n \sin n\theta$, dvs $c_n(f') = in c_n(f)$, $a_n(f') = n b_n(f)$, $b_n(f') = -n a_n(f)$.

Bevis.
$$c_n(f') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(\theta) e^{-in\theta} d\theta = \left\{\text{Diskontinuitetspkter } -\pi = x_0 < x_1 < \dots x_k = \pi\right\} =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{k}\int_{x_{j-1}}^{x_j} f'(\theta) e^{-in\theta} d\theta \overset{\text{P.I.}}{=} \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{k}\left[f(\theta)e^{-in\theta}\right]_{x_{j-1}}^{x_j} + \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{k} in\int_{x_{j-1}}^{x_j} f(\theta)e^{-in\theta} d\theta =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left[f(\theta)e^{-in\theta}\right]_{-\pi}^{\pi} + in\, c_n(f) = in\, c_n(f), \text{ ty } f \text{ periodisk.}$$

Termvis integration av Fourierserier

Sats: Antag att f är 2π-periodisk med Fourierkoefficienter c_n resp a_n, b_n, där $a_0 = c_0 = 0$. Antag att f är styckvis kontinuerlig.
Om F är en primitiv funktion till f, så har F Fourierserie
$$C_0 + \sum_{n\neq 0}\frac{c_n}{in} e^{in\theta} \quad \text{alt} \quad \frac{A_0}{2} + \sum_{1}^{\infty}\frac{a_n}{n}\sin n\theta - \frac{b_n}{n}\cos n\theta, \text{ där}$$
$C_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\theta)\, d\theta = \frac{A_0}{2}$ och C_0 beror av vilken F vi väljer.

Bevis: F är styckvis glatt och kontinuerlig. Om F har Fourierkoefficienter C_n ger satsen om derivering att $c_n = in\, C_n \Leftrightarrow C_n = \frac{c_n}{in}$

Sats om faltning

Sats. Antag att g är begränsad och $x^2 g(x) \xrightarrow{x\to\pm\infty} 0$, så att $g \in L^1(\mathbb{R})$, och $\int_{\mathbb{R}} g(x)\,dx = 1$. Låt $f \in L^1(\mathbb{R})$. Om f är kontinuerlig i x gäller $f * g_\varepsilon(x) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} f(x)$. Om f har ändliga gränsvärden i x och g är en jämn funktion, gäller $f * g_\varepsilon(x) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2}\left(f(x+) + f(x-)\right)$.

Bevis: I kontinuitetspkten x: $f * g_\varepsilon(x) = \int f(x-y)\frac{1}{\varepsilon} g\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) dy = \left\{z = y/\varepsilon\right\} = \int f(x-\varepsilon z) g(z)\, dz$.
$$f * g_\varepsilon(x) - f(x) = \int \left(f(x-\varepsilon z) - f(x)\right) g(z)\, dz =$$
$$= \int_{|z|<1/\sqrt{\varepsilon}} \left(f(x-\varepsilon z) - f(x)\right) g(z)\, dz + \int_{|z|>\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}} f(x-\varepsilon z) g(z)\, dz - f(x)\int_{|z|>1/\sqrt{\varepsilon}} g(z)\, dz = \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III},$$

$$|\mathrm{I}| \le \int_{|z|<1/\sqrt{\varepsilon}} |f(x-\varepsilon z) - f(x)||g(z)|dz \le \sup_{|z|<1/\sqrt{\varepsilon}} |f(x-\varepsilon z) - f(x)| \cdot \int_{|z|<1/\sqrt{\varepsilon}} |g(z)|\, dz \le \sup_{|y|<\sqrt{\varepsilon}} |f(x-y) - f(x)| \cdot \|g\|_1 \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0$$

$$|\mathrm{II}| \le \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-\varepsilon z)|\, dz \sup_{|z|>1/\sqrt{\varepsilon}} |g(z)| \le \frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y)|\, dy \sup_{|z|>1/\sqrt{\varepsilon}} |g(z)| \le \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^2 \|f\|_1 \sup_{|z|>1/\sqrt{\varepsilon}} |g(z)| \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0$$

$$|\mathrm{III}| \le |f(x)| \int_{|z|>1/\sqrt{\varepsilon}} |g(z)|\, dz \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0, \text{ ty } \int_{-\infty}^{\infty} |g(z)|\, dz \text{ ändlig.}$$

$$\therefore \quad (\mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III}) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0 \quad \Rightarrow \quad f * g_\varepsilon(x) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} f(x)$$

David Frisk

Fouriers inversionsformel

Sats: Antag $f \in L^1$, styckvis kontinuerlig. Då $\varepsilon \to 0$ konvergerar $\frac{1}{2\pi}\int \hat{f}(\omega) e^{-\frac{\varepsilon^2\omega^2}{2}} e^{ix\omega} d\omega$ mot $f(x)$ i kont. pkter och $\frac{1}{2}(f(x+)+f(x-))$ i språngpunkter. Om dessutom $\hat{f} \in L^1$ så är f kontinuerlig (efter ändring i ändligt många punkter) och

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int \hat{f}(\omega) e^{ix\omega} d\omega \quad \forall x$$

Bevis: $\frac{1}{2\pi}\int \hat{f}(\omega) e^{-\frac{\varepsilon^2\omega^2}{2}} e^{ix\omega} d\omega = \frac{1}{2\pi}\int f(y) \underbrace{\int e^{-\frac{\varepsilon^2\omega^2}{2}} e^{-i(y-x)\omega} d\omega}_{I}\, dy = \left\{ I \text{ är F-transformen av } f(t) = e^{-\frac{\varepsilon^2 t^2}{2}};\ (y-x) \text{, dvs } I = \frac{\sqrt{2\pi}}{\varepsilon} e^{-(y-x)^2/2\varepsilon^2} \right\}$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int f(y) \frac{1}{\varepsilon} e^{-\left(\frac{y-x}{\varepsilon}\right)^2/2} dy = f * \phi_\varepsilon(x)$, $\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$, så att $\phi \in L^1$, $\phi \geq 0$, ϕ är begränsad och $\int \phi(t)\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{-t^2/2} dt = 1$. Då ger satsen om faltning att $f * \phi_\varepsilon(x) \xrightarrow{\varepsilon \to 0} f(x)$ om $f \in L^1$, kont. i x.

$\left|\hat{f}(\omega) e^{-\frac{\varepsilon^2\omega^2}{2}} e^{i\omega x}\right| \leq |\hat{f}(\omega)| \Rightarrow$ Dom. konv. satsen ger $\int \hat{f}(\omega) e^{-\frac{\varepsilon^2\omega^2}{2}} e^{i\omega x} d\omega \to \int \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega$

$\to f(x)$ i kont-pkter

Plancherels formel

Sats: Antag att $f, g, \hat{f}, \hat{g} \in L^1$, där f och g är styckvis kontinuerliga, så att även $f, g, \hat{f}, \hat{g} \in L^2$. Då är $\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi}\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle$.

Bevis: $\langle f, g \rangle = \int f(x)\overline{g(x)}\, dx = \int f(x) \cdot \overline{\frac{1}{2\pi}\int \hat{g}(\omega) e^{i\omega x} d\omega}\, dx = \frac{1}{2\pi}\iint f(x)\overline{\hat{g}(\omega)} e^{-i\omega x} d\omega\, dx =$

$$= \frac{1}{2\pi}\int \overline{\hat{g}(\omega)} \cdot \underbrace{\int f(x) e^{-i\omega x} dx}_{\hat{f}(\omega)}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int \hat{f}(\omega)\overline{\hat{g}(\omega)} d\omega = \frac{1}{2\pi}\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle$$

Om $f = g$ är $\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\|\hat{f}\|_2^2$

Samplingssatsen

Sats: Antag att signalen $f \in L^2(\mathbb{R})$ har bandbredd högst α, dvs $\hat{f}(\omega) = 0$ om $|\omega| > \alpha$.
Då är f bestämd av den samplade signalen $(f(nT))_{n=-\infty}^{+\infty}$ om $T < \frac{\pi}{\alpha}$.
Mer precist är $f(t) = T\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)\frac{\sin\alpha(t-nT)}{\pi(t-nT)}$, $t \in \mathbb{R}$.

Bevis: $HL = T\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)\, LP_\alpha\, \delta(t-nT) = T \cdot LP_\alpha\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT)\,\delta(t-nT)\right)$, så ekv. är ekviv. med

$f(t) = T \cdot LP_\alpha\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT)\,\delta(t-nT)\right)$. Man har $f(t)\,\delta(t-a) = f(a)\,\delta(t-a)$, så

$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)\,\delta(t-nT) = f(t)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)$, där summen $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$ är

T-periodisk, med Fourierserie $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\frac{2\pi}{T}kt}$,

$$c_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\sum_{-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)\, e^{-i\frac{2\pi}{T}kt} dt = \left\{ -T \quad 0 \quad T \right\} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\delta(t)\, e^{-i\frac{2\pi}{T}kt} = \frac{1}{T}$$

Alltså: $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{i\frac{2\pi}{T}kt}$

$$HL = T\, LP_\alpha\left(\sum_{-\infty}^{\infty} f(nT)\,\delta(t-nT)\right) = LP_\alpha\left(f(t)\sum_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{2\pi}{T}kt}\right) = \mathcal{F}^{-1}\left(\chi_{(-\alpha,\alpha)}(\omega)\, \widehat{f(t)\sum_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{2\pi}{T}kt}}(\omega)\right) =$$

$$= \mathcal{F}^{-1}\sum_{-\infty}^{\infty}\chi_{(-\alpha,\alpha)}(\omega)\, \widehat{f(t)e^{i\frac{2\pi}{T}kt}}(\omega) = \mathcal{F}^{-1}\sum_{-\infty}^{\infty}\chi_{(-\alpha,\alpha)}(\omega)\, \hat{f}\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right) = \left\{ \frac{2\pi}{T} > 2\alpha, \text{ bara } k = 0 \text{ blir } \neq 0 \right\} =$$

$$= \mathcal{F}^{-1}\hat{f}(\omega) = f(t).$$

David Frisk

Sats om bästa approximation

Sats: Givet N och $f \in L^2$, är $\sum_{n=1}^{\infty} c_n(f)\phi_n$ den punkt i underrummet $H_N = \left\{ \sum_{n=1}^{N} d_n \phi_n : d_n \text{ skalärer} \right\}$ som ligger närmast f, dvs

$$\min \left\| f - \sum_{n=1}^{N} d_n \phi_n \right\| = \left\| f - \sum_{n=1}^{N} c_n(f)\phi_n \right\|,$$ där min tas över alla skalärer.

Bevis: Klart att $\min \left\| f - \sum_{n=1}^{N} d_n \phi_n \right\| \leq \left\| f - \sum_{n=1}^{N} c_n(f)\phi_n \right\|$. Visa att

$$\left\| f - \sum_{n=1}^{N} d_n \phi_n \right\| \geq \left\| f - \sum_{n=1}^{N} c_n(f)\phi_n \right\| \quad \text{för alla } d_n \quad (1)$$

Vektorn $f - \sum_{n=1}^{N} c_n(f)\phi_n$ är ortogonal mot varje ϕ_k, $k \leq N$, ty $\sum$ N?

$$\langle f, \phi_k \rangle - \sum_{n=1}^{\infty} c_n(f) \langle \phi_n, \phi_k \rangle = \langle f, \phi_k \rangle - c_k(f) \|\phi_k\|^2 = 0,$$ och också ortogonal mot varje vektor i H_N

Skriv $$f - \sum_{n=1}^{N} d_n \phi_n = f - \sum_{n=1}^{N} c_n(f)\phi_n + \sum_{n=1}^{N} c_n(f)\phi_n - \sum_{n=1}^{N} d_n \phi_n =$$

$$= f - \sum_{n=1}^{N} c_n(f)\phi_n + \underbrace{\sum_{n=1}^{N} (c_n(f) - d_n)\phi_n}_{\in H_N}.$$ Pythagoras sats ger:

$$\left\| f - \sum_{n=1}^{N} d_n \phi_n \right\|^2 = \left\| f - \sum_{n=1}^{N} c_n(f)\phi_n \right\|^2 + \sum_{n=1}^{N} \| c_n(f) - d_n \|^2 \|\phi_n\|^2.$$

(1) följer. Satsen följer.

Sats om fullständighet för ortogonal system

Sats: Låt $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ vara ett ortonormalt system i $L^2(a,b)$. Då är följande ekvivalent:

a) Om $\langle f, \varphi_n \rangle = 0 \ \forall n$ är $f \equiv 0$

b) För varje $f \in L^2(a,b)$ är $f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \varphi_n \rangle \cdot \varphi_n$, där serien konvergerar i norm.

c) För varje $f \in L^2(a,b)$ är $\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, \varphi_n \rangle|^2$

Bevis:

$a \to b$: för $f \in L^2(a,b)$ konvergerar $\sum_1^{\infty} \langle f, \varphi_n \rangle \varphi_n$ i norm enligt Lemma 3.2.

Låt $g = f - \sum_1^{\infty} \langle f, \varphi_n \rangle \varphi_n$

$$\langle g, \varphi_m \rangle = \langle f, \varphi_m \rangle - \sum_1^{\infty} \langle f, \varphi_n \rangle \langle \varphi_n, \varphi_m \rangle = \langle f, \varphi_m \rangle - \langle f, \varphi_m \rangle = 0 \quad \forall m.$$

Om a är sant så är $g = 0 \Rightarrow b$ sant

$b \to c$: Om $f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \varphi_n \rangle \varphi_n$ ger Pythagoras sats:

$$\|f\|^2 = \lim_{N \to \infty} \left\| \sum_{n=1}^{N} \langle f, \varphi_n \rangle \varphi_n \right\|^2 = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} |\langle f, \varphi_n \rangle|^2 = \sum_1^{\infty} |\langle f, \varphi_n \rangle|^2$$

$c \to a$: Om c är sant och $\langle f, \varphi_n \rangle = 0 \ \forall n$ är $\|f\| = 0$, dvs $f = 0$.

Definition av ett reguljärt Sturm-Liouville Problem

Def: Ett reguljärt Sturm-Liouville-problem i ett begränsat intervall $[a,b]$ består av:

- En formellt självadjungerad operator $Lf = (rf')' + pf$, där r, r' och p är reellvärda och kontinuerliga, $r > 0$ i $[a,b]$
- Självadjungerade randvillkor: $B_1(f) = 0$, $B_2(f) = 0$
- En viktsfunktion w som är kontinuerlig och positiv i $[a,b]$

Sats om Reguljärt Sturm-Liouville Problem

Sats: För ett Reguljärt Sturm-Liouville Problem gäller
a) Alla egenvärden är reella
b) Om f, g är egenfunktioner med olika egenvärden är $\langle f,g\rangle_w = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,w(x)dx = 0$

Bevis: Tag egenfunktioner f, g med egenvärden λ, μ $(\lambda \neq \mu)$.

$$\lambda \cdot \int_a^b w(x) f(x)\overline{g(x)}\,dx = \langle \lambda w f, g\rangle = -\langle Lf, g\rangle = -\langle f, Lg\rangle = \langle f, \mu w g\rangle =$$

$$= \int_a^b f(x)\underbrace{\overline{\mu w(x) g(x)}}_{=\bar{\mu}\, w(x)\overline{g(x)}}dx = \bar{\mu}\int_a^b w(x)\overline{g(x)}\,f(x)\,dx$$

$$\Rightarrow (\lambda - \bar{\mu})\int_a^b w(x) f(x)\overline{g(x)}\,dx = 0 \quad . \quad \text{Välj } g = f, \ \mu = \lambda$$

$$\Rightarrow (\lambda - \bar{\lambda})\underbrace{\int_a^b w(x)|f(x)|^2 dx}_{=\|f\|_w^2 > 0} = 0 \quad \Rightarrow \lambda = \bar{\lambda} \quad \Rightarrow \lambda \text{ reellt} \quad (a)$$

Tag nu f, g med $\lambda \neq \mu \Rightarrow \underbrace{(\lambda - \mu)}_{\neq 0}\int_a^b w(x) f(x)\overline{g(x)}\,dx = 0$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,w(x)\,dx = 0 \qquad (b).$$

Genererande funktion för Besselfunktioner

Sats: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) z^n = e^{\frac{1}{2}x(z-\frac{1}{z})} \quad \forall \ x \in \mathbb{R}, \ z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$

Bevis: $e^{\frac{1}{2}xz} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{z^j}{j!}\left(\frac{x}{2}\right)^j, \quad e^{-\frac{x}{2z}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{z^k \cdot k!}\left(\frac{x}{2}\right)^k$

$$e^{\frac{1}{2}x(z-\frac{1}{z})} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} z^{j-k}\cdot\frac{(-1)^k}{j!\,k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{j+k} = \left\{\text{Byt } j \text{ mot } n = j-k \geq -k\right\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=-k}^{\infty} z^n \frac{(-1)^k}{(n+k)!\,k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k} = \left\{\begin{array}{l} m! = \Gamma(m+1), \ m = 0, 1, \dots \\ \text{tolka } \frac{1}{m!} \text{ som } 0 \text{ då } m = -1, -2, \dots \end{array}\right\} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(n+k)!\cdot k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n \cdot J_n(x)$$

David Frisk

Hermitepolynomens ortogonalegenskap

Sats: H_n är ortogonala i $L^2_w(\mathbb{R})$, $w(x)=e^{-x^2}$, och $\|H_n\|^2_w = 2^n n!\sqrt{\pi}$

Bevis: Ta $m \le n$.

$$\langle H_m, H_n\rangle_w = \int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x) H_n(x)\, e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)\cdot(-1)^n e^{x^2}\left(\frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}\right)\cdot e^{-x^2} dx =$$

$$= (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} dx \overset{PI}{=} (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} H_m(x)\, e^{-x^2} dx.$$

Om $m<n$ är $\frac{d^n}{dx^n} H_m(x) = 0$, så ortogonaliteten följer.

Om $m=n$ är $\frac{d^n}{dx^n} H_n(x) = \frac{d^n}{dx^n} 2^n \cdot x^n = 2^n \cdot n!$, och

$$\langle H_n, H_n\rangle_w = \int_{-\infty}^{\infty} 2^n \cdot n!\, e^{-x^2} dx = 2^n \cdot n!\sqrt{\pi}$$

Härledning av den genererande funktionen för Hermitepolynom

Sats: $\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\cdot \frac{z^n}{n!} = e^{2xz - z^2}$ för alla $x \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$

Bevis: Taylorutveckla $e^{-(x+h)^2}$ kring x: $e^{-(x+h)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \cdot h^n$

Sätt $h=-z$: $e^{-(x-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} (-1)^n \cdot z^n$

Def: $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$

$$\Rightarrow e^{-(x-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-x^2}\cdot H_n(x)\cdot \frac{z^n}{n!}$$

$$\Rightarrow e^{2xz - z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\cdot \frac{z^n}{n!}$$