# Kvanttillstånd

Mån Lv2

Varje fysikaliskt system har ett tillståndsrum $\mathcal{H}$

$\mathcal{H}$ är ett linjärt (vektor)-rum över de komplexa talen $\mathbb{C}$

↳ Om $\psi, \psi'$ är två godtyckliga element i $\mathcal{H}$ ($\psi, \psi' \in \mathcal{H}$) och $c, c'$ är ~~godtyckliga~~ komplexa tal så är linjär kombinationerna

$$c\psi + c'\psi'$$ också ett element i $\mathcal{H}$

Element i $\mathcal{H}$ = "tillstånd"

Obs! $\frac{1}{2}\psi_{\text{fullt}} + \frac{1}{2}\psi_{\text{tomt}} \neq \psi_{\text{halvfullt}}$ $\Bigg\{$ tillstånd som beskriver ett fullt, tomt, resp. halvfullt glas

Låt $x_1, \dots, x_D \in \mathcal{H}$ vara linjärt oberoende OM

$$c_1 x_1 + \dots + c_D x_D = 0$$ $\Big\{$ med obekanta $c_1, \dots, c_D \in \mathbb{C}$

bara har den triviala lösningen $c_1 = \dots = c_D = 0$

Det maximala antalet $D$ av linjärt oberoende element kallas för $\dim \mathcal{H}$ (dimensionen av $\mathcal{H}$)

Elementen $x_1, \dots, x_D$ utgör då en bas för $\mathcal{H}$

varje element $\psi \in \mathcal{H}$ kan då entydigt skrivas som en linjärkombination

$$\psi = c_1 x_1 + \dots + c_D x_D$$

Tillståndsrummet $\mathcal{H}$ har en inre produkt (Skalärprodukt)
Produkten mellan $\psi \in \mathcal{H}$ och $\chi \in \mathcal{H}$ skrivs

$$\langle \psi | \chi \rangle$$

och är ett komplext tal (LaTex-tips: $\langle$ \langle, $\rangle$ \rangle)

Obs! $\langle \psi | \chi \rangle = \overline{\langle \chi | \psi \rangle}$ komplex konjugat

$\langle \psi | \psi \rangle \geq 0$ (positivt definit)

$\psi$ är normerat om $\langle \psi | \psi \rangle = 1$

$\psi, \chi$ är ortogonala om $\langle \psi | \chi \rangle = 0$

Skalärprodukten är seskilinjär:

seskvi-linjär!
$$\begin{cases} \langle \psi | c_1 \chi_1 + c_2 \chi_2 \rangle = c_1 \langle \psi | \chi_1 \rangle + c_2 \langle \psi | \chi_2 \rangle & \text{linjär!} \\ \langle c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2 | \chi \rangle = \bar{c}_1 \langle \psi_1 | \chi \rangle + \bar{c}_2 \langle \psi_2 | \chi \rangle & \text{antilinjär!} \end{cases}$$

Kan ej räknas ut explicit! :)

Dirac's Notation: Ett och samma tillstånd $\psi \in \mathcal{H}$
kan skrivas på två olika "duala" sätt:
som en "bra" $\langle \psi |$ eller en "ket" $| \psi \rangle$

$\langle \psi | c | \chi \rangle$ "bracket"

Inför en ortonormerad bas (ON-bas) $\chi_1, \ldots, \chi_D$ för $\mathcal{H}$:

$$\langle \chi_i, \chi_j \rangle = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \qquad \langle \chi_i | \chi_j \rangle = \delta_{ij}$$

Med $\quad \varphi = c_1 x_1 + \dots + c_D x_D$

$$\varphi' = c_1' x_1 + \dots + c_D' x_D$$

får vi då

$$\langle \varphi | \varphi' \rangle = \langle c_1 x_1 + \dots + c_D x_D | c_D' x_D + \dots + c_1' x_1 \rangle$$

$$= \overline{c}_1 c_1' + \dots + \overline{c}_D c_D'$$

Givet $\mathcal{H}$ så finns det många sätt att välja en ON-bas

Ex. Om $D = \dim \mathcal{H} = 1$ så har en bas bara ett element.

Vi kan ett godtyckligt $x_1 \neq 0$ som bas-element

Men! Normeringsvillkor: $\langle x_1 | x_1 \rangle = 1$

Obs! $x_1' = e^{i\phi} x_1$ uppfyller samma villkor:

$$\langle x_1' | x_1' \rangle = \langle e^{i\phi} x_1 | e^{i\phi} x_1 \rangle =$$

$$= \overline{e^{i\phi}}\, e^{i\phi} \langle x_1 | x_1 \rangle = e^{-i\phi} \cdot e^{i\phi} \cdot 1 = 1$$

Om $D = \dim \mathcal{H} = 2$ och $x_1, x_2$ är en ON-bas så kan alla andra ON-baser $x_1', x_2'$ skrivas

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\alpha}\cos\theta & e^{i\beta}\sin\theta \\ -e^{i\gamma}\sin\theta & e^{i(-\alpha+\beta+\gamma)}\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

för godtyckliga (reella) vinklar $\alpha, \beta, \gamma, \theta$

Beviset är "lagom klurigt" ....

Tillståndsrum $\mathcal{H}$ (linjärt rum över $\mathbb{C}$)

En delmängd $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}$ är ett underrum till $\mathcal{H}$ om den i sig är ett linjärt rum över $\mathbb{C}$

Ex. om $D = \dim \mathcal{H} = 1$ så finns det bara två underrum:
$\mathcal{H}$ självt eller mängden $\{0\}$ (bara nollelementet i $\mathcal{H}$)

Om $D = \dim \mathcal{H} = 2$ så finns det förutom $\mathcal{H}$ och $\{0\}$ oändligt många underrum av dimensionen $\dim \mathcal{H}_1 = 1$

Ty om $\psi \neq 0$, $\psi \in \mathcal{H}$ så är $\mathcal{H}_1 = \{c\psi \mid c \in \mathbb{C}\}$ ett underrum (dvs, alla komplexa multipler av $\psi$)

Men $\psi$ och $\psi' = c\psi$ för $c \neq 0$ definierar samma underrum

Om vi inför en bas $\chi_1, \chi_2$ för $\mathcal{H}$ så kan vi utveckla
$\psi = c_1\chi_1 + c_2\chi_2$, $c_1$ och $c_2$ bestämmer $\psi$

Förhållandet $c_1 : c_2$ beskriver alla olika endimensionella underrum till $\mathcal{H}$.

$c_1 : c_2$ är ett komplext tal eller $\infty$ (Riemann-sfär)

$D = \dim \mathcal{H}$ godtyckligt

underrum $\mathcal{H}_1$

Definiera $\mathcal{H}_1^{\perp} = \{\psi \in \mathcal{H} \mid \langle \psi | \chi \rangle = 0 \ \forall \chi \in \mathcal{H}_1\}$

som är ortogonalkomplementet till $\mathcal{H}_1$ och också är ett ~~ko~~ underrum till $\mathcal{H}$.

Det gäller att $\dim \mathcal{H} = \dim \mathcal{H}_1 + \dim \mathcal{H}_1^{\perp}$

obs! $(\mathcal{H}_1^{\perp})^{\perp} = \mathcal{H}_1$

Vi skriver $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_1^\perp$ "direkt summa"

Detta betyder att ett godtyckligt element $\psi \in \mathcal{H}$ entydigt kan skrivas som en summa

$$\psi = \psi_1 + \psi_1^\perp \quad \text{där} \quad \psi_1 \in \mathcal{H}_1, \ \psi_1^\perp \in \mathcal{H}_1^\perp$$

Mer allmänt kan ett tillståndsrum $\mathcal{H}$ delas upp som en direkt ~~so~~ summa av ett antal inbördes ortogonala underrum ~~inbördes ortogonala~~ $\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_N$

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_N$$

dvs det finns en entydig uppdelning av $\psi \in \mathcal{H}$

$$\psi = \underbrace{\psi_1}_{\in \mathcal{H}_1} + \dots + \underbrace{\psi_N}_{\in \mathcal{H}_N}$$

## Köpenhamnstolkningen (Niels Bohr + diskussionspartners)

Ett system har ett tillståndsrum $\mathcal{H}$

Ett tillstånd är ett en-dimensionellt underrum (en stråle) till $\mathcal{H}$

Ekvivalent är ett tillstånd givet av ett element $\psi \neq 0$

$\psi$ och $c\psi$ ger alltså samma tillstånd. Välj gärna $\psi$ normerat: $\langle \psi | \psi \rangle = 1$

Vi gör en lämplig mätning på systemet

Detta svarar mot en ortogonaluppdelning $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_N$

(en annan mätning hade gett en annan uppdelning)

Varje term svarar mot ett tänkbart mätresultat.

Motsvarande uppdelning av tillståndet $\psi$ är $\psi = \psi_1 + \ldots + \psi_N$

~~Born~~ Borns regel: sannolikheten för att få resultat $i$ är

$$P_i = \frac{\langle \psi_i | \psi_i \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle}$$

{ $\langle \psi | \psi \rangle = 1$ för normerat tillstånd }

Notera att $P_1 + \ldots + P_N = 1$ (övning!)

Antag att vi fick ett visst resultat nummer $i$

Efter mätningen kommer systemet inte längre att vara i tillståndet $\psi$ utan i tillståndet $\psi_i$ eller om vi vill normera det i tillståndet

$$\frac{e^{i\phi}\,\psi_i}{\sqrt{\langle \psi_i | \psi_i \rangle}}$$

vi gör om samma mätning.
vi skall alltså dela upp det nya tillståndet $\psi_i$ enligt

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{H}_N$$

$$\psi_i = 0 + \ldots + \psi_i + \ldots + 0$$

vi får alltså resultatet ~~nr~~ nummer $i$ med sannolikhet 1.