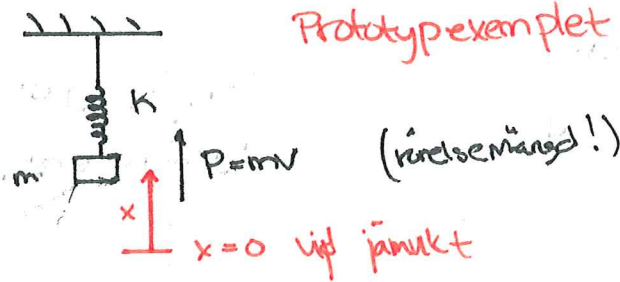


Den harmoniska oscillatorn

Mån LVS



Många intressanta klassiska system, t.ex. massa i fjäder, svängningsmed i elektromagnetiska fältet...

Tag två tillståndsvariabler A, B som uppfyller rörelsekv.

$$\rightarrow \begin{cases} \frac{dA}{dt} = WB \\ \frac{dB}{dt} = -WA \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} W = \text{konst.} \\ (*) \end{array} \right.$$

Ex. $A = (km)^{\frac{1}{4}} x$
 $B = (km)^{-\frac{1}{4}} p$ } för massa i fjäder!

$A = \text{komp. av elektriskt fält}$
 $B = \text{--- " --- magnetiskt fält}$ } EM-fältet!

A och B "ändras" i tiden, men det finns (naturligtvis!) en bevarad energi {^{ty} tidsinvarians}:

$$E = \frac{W}{2} (A^2 + B^2) \quad \frac{\partial E}{\partial t} = 0 \text{ enligt } (*)$$

Den allmänna lösningen är

$$\begin{cases} A(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t \\ B(t) = -c_1 \sin \omega t + c_2 \cos \omega t \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1, c_2 \text{ god-} \\ \text{tyckliga konst.} \end{array} \right\}$$

1 Kvantfysiken

Bör finnas två operatorer $\hat{A}, \hat{B}$ som verkar på ett tillståndsrum $\mathcal{H}$, samt en Hamilton-operator $\hat{H}$ som beskriver systemets tidsutveckling enligt SE.

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}\psi \quad \psi \in \mathcal{H}$$

Hur får vi in de klassiska rörelseekvationerna (*)?

~~Ehrenfests lemma~~ $\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \end{array} \right.$

Ekv. för förväntansvärde:

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \psi(t) | \hat{A} | \psi(t) \rangle = \omega \langle \psi(t) | \hat{B} | \psi(t) \rangle$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \psi(t) | \hat{B} | \psi(t) \rangle = -\omega \langle \psi(t) | \hat{A} | \psi(t) \rangle$$

Ehrenfests lemma:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \langle \psi(t) | \hat{A} | \psi(t) \rangle = \langle \psi(t) | \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{A}] + \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} | \psi(t) \rangle \\ \text{P.s.s för } \hat{B}! \end{cases}$$

Om detta skall gälla för alla $\Psi(t)$ så måste operatorerna $\hat{A}$, $\hat{B}$ och $\hat{H}$ uppfylla:

$$\begin{cases} [\hat{H}, \hat{A}] = -i\hbar\omega \hat{B} \\ [\hat{A}, \hat{B}] = +i\hbar\omega \hat{A} \end{cases}$$

↳ kan "diagonaliseras" genom att införa nya operatören! :

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} (\hat{A} + i\hat{B}) \quad \text{icke-Hermiteisk}$$

$$\hat{\alpha}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} (\hat{A} - i\hat{B}) \quad \text{Hermite-konjugatet}$$

För nu:

$$[\hat{H}, \hat{\alpha}] = -\hbar\omega \hat{\alpha}$$

$$[\hat{H}, \hat{\alpha}^\dagger] = +\hbar\omega \hat{\alpha}^\dagger$$

} kalla själv!

Antag nu att $\Psi \in \mathcal{H}$ "är ett egentillstånd till $\hat{H}$ med energi E :

$$\hat{H}\Psi = E\Psi$$

Tillståndet $\hat{\alpha}\Psi$ är då också ett egentillstånd till $\hat{H}$, fast med energi $E - \hbar\omega$:

$$\hat{H}(\hat{\alpha}\Psi) = ([\hat{H}, \hat{\alpha}] + \hat{\alpha}\hat{H})\Psi$$

$$= (-\hbar\omega\hat{\alpha} + \hat{\alpha}E)\Psi$$

"vanligt reellt tal"

eigenvärde

$$= (-\hbar\omega + E)(\hat{\alpha}\Psi)$$

egentillstånd

Detta kan (kanske) upprepas:

$$\psi, \hat{a}\psi, \hat{a}^2\psi, \dots$$

bör vara egentillstånd till $\hat{H}$ med allt lägre energier:

$$E, E - \hbar\omega, E - 2\hbar\omega$$

↳ Måste ha ett slut!

Det bör finnas ett "grundtillstånd" $\psi_0 \in \mathcal{H}$ så att

$$\hat{a}\psi_0 = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{ej normerbart, men } \psi_0 \text{ normerat! } \langle \psi_0 | \psi_0 \rangle = 1 \end{array} \right\}$$

$$[\hat{H}, \hat{a}] = -\hbar\omega \hat{a} \quad \rightarrow \quad \hat{a} \text{ ändrar energin med } -\hbar\omega$$

$$[\hat{H}, \hat{a}^\dagger] = +\hbar\omega \hat{a}^\dagger \quad \rightarrow \quad \text{--- " --- " --- } +\hbar\omega$$

vi postulerade existensen av ett normerat grundtillstånd ψ_0 sådan att $\hat{a}\psi_0 = 0$. En vanlig konvention är att detta har energin

$$\frac{\hbar\omega}{2} \quad (\text{eller ibland energin } 0)$$

Alla andra ~~tillstånd~~ tillstånd kan sedan erhållas genom att verka med **skapelseoperatoren** $\hat{a}^\dagger$. (**förnielseoperator** $\hat{a}$)

$$\left. \begin{array}{l} \hat{a}^\dagger \psi_n = \sqrt{n+1} \psi_{n+1} \\ \hat{a} \psi_n = \sqrt{n} \psi_{n-1} \end{array} \right\} \psi_n \text{ är egentillstånd: } \hat{H} \psi_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2}) \psi_n$$

Alla ψ_n , $n=0,1,2,\dots$ utgör ett ortonormerat system

$$\langle \psi_n | \psi_{n'} \rangle = \delta_{nn'} = \begin{cases} 0 & n \neq n' \\ 1 & n = n' \end{cases}$$

Uttryck Hamilton-operatoren $\hat{H}$ i termer av $\hat{X}, \hat{X}^\dagger$
eller de ursprungliga $\hat{A}, \hat{B}$;

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{X}^\dagger \hat{X} + \frac{1}{2} \right)$$

$$= \frac{\omega}{2} (\hat{A}^2 + \hat{B}^2) \quad \left\{ \text{ifr. klassiskt uttryck!} \right\}$$

Man kan även skriva

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{N} + \frac{1}{2} \right)$$

där **antalsoperatoren** ges av $\hat{N} = \hat{X}^\dagger \hat{X}$

Obs! $\hat{N}\psi_n = \hat{X}^\dagger \hat{X} \psi_n = \hat{X}^\dagger \sqrt{n} \psi_{n-1}$

$$= \sqrt{n} \hat{X}^\dagger \psi_{n-1} = \sqrt{n} \sqrt{n} \psi_n$$

$$= n\psi_n$$

Tillstånden ψ_n , $n=0,1,2,\dots$ utgör en ON-bas
för ett tillståndsrum $\mathcal{H}$ av (uppräknligt) ändlig dimension
 $\dim \mathcal{H} = \infty$.

Ett godtyckligt element ψ i $\mathcal{H}$ kan skrivas som en
linjär kombination:

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \psi_n$$

komplexa koefficienter

Vi måste ~~kräva~~ kräva att ψ är normerbart

$$\langle \psi | \psi \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n'=0}^{\infty} \langle c_n \psi_n | c_{n'} \psi_{n'} \rangle$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n'=0}^{\infty} \overline{c_n} c_{n'} \delta_{nn'} = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 < \infty$$

Så $\mathcal{H} = \{ \text{linjär komb. av } \psi_n \text{ med "ändlig norm"} \}$

$\mathcal{H}$ är ett linjärt rum $\rightarrow$ Hilbertrum

Fotoner

Varje med av EM-fältet är en harmonisk oscillator.

Excitationerna kallas för fotoner. Med nollpunktsenergin $= 0$
Så har ett tillstånd med n fotoner energin

$$E = n\hbar\omega$$

Energispectrum för harmonisk oscillator

