

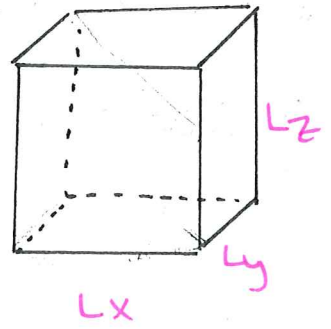
Förra gången:

Part. i låda med periodiska randvillkor

Rörelsemängden $\hat{P} = P_x \hat{i} + P_y \hat{j} + P_z \hat{k}$

är kvantiserat:

$$P_x = \frac{2\pi\hbar}{L_x} L_x \quad (L_x \text{ heltal})$$



OSV...

Inför ON-bas av tillstånd ψ_P med sådana värden på rörelsemängden och skriv godtyckligt tillstånd som linjärkombination:

$$\psi = \sum_P C_P \psi_P$$

Samma information har representerats gnm. vågfunktionen

$$\psi(\mathbf{r}) = \sum_P C_P \exp\left(\frac{i}{\hbar} \mathbf{P} \mathbf{r}\right)$$

Inre produkt motsvaras av $\langle \psi | \psi' \rangle = \int_{\text{lådan}} d^3\mathbf{r} \overline{\psi(\mathbf{r})} \psi'(\mathbf{r})$

operatören för rörelsemängden är: $\hat{P} = -i\hbar \nabla$

och för läge: $\hat{\mathbf{r}} = \hat{r}_x \hat{i} + \hat{r}_y \hat{j} + \hat{r}_z \hat{k}$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{operatorer svarande mot} \\ \text{lägets komponenter} \end{array} \right\}$

$$(\hat{p}\psi)(\mathbf{r}) = -i\hbar \nabla \psi(\mathbf{r})$$

$$(\hat{r}_x \psi)(\mathbf{r}) = x \psi(\mathbf{r})$$

Tillstånd ψ med sannolikhetstättet $|\psi(\mathbf{r})|^2$

Förväntansvärde av partikelns x -koordinat:

$$E(x) = \bar{x} = \int_{\text{rummet}} x |\psi(\mathbf{r})|^2 dx dy dz$$

Men i kvantfysiken svarar x mot en operator $\hat{r}_x$.

Skall gälla att:

$$E(x) = \langle \psi | \hat{r}_x | \psi \rangle$$

stämmer om $\hat{r}_x$ verkar enligt

$$(\hat{r}_x \psi)(\mathbf{r}) = x \psi(\mathbf{r})$$

$$\langle \psi | \hat{r}_x \psi \rangle = \int dx dy dz \overline{\psi}(\mathbf{r}) x \psi(\mathbf{r})$$

$$= \int dx dy dz x |\psi(\mathbf{r})|^2 = E(x)$$

Oändlig volym

Låt $L_x, L_y, L_z \rightarrow \infty$

Tänkbara värden på rörelsemängd övergår i ett kontinuum!

Summa över $\mathbf{p}$ övergår i integraler:

$$\sum_{\mathbf{p}} \rightarrow \int d^3p$$

Vågfunktionen ψ kan utvecklas i en Fourier integral

$$\psi(\mathbf{r}) = \int d^3p \tilde{\psi}(\mathbf{p}) \exp\left(\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}\right)$$

Vägfkn i lägesrummet! (pointing to $\psi(\mathbf{r})$)
motsvarar koef. c_p (pointing to $\tilde{\psi}(\mathbf{p})$)
 $\left\{ \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \right\}$

$$\text{kan inverteras! } \tilde{\psi}(\mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3r \psi(\mathbf{r}) \exp\left(\frac{-i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}\right)$$

Vägfkn i rörelsemängdsrummet! (pointing to $\tilde{\psi}(\mathbf{p})$)

$\psi, \tilde{\psi}$ representerar samma kvanttillstånd $\psi \in \mathcal{H}$!

$|\psi(\mathbf{r})|^2 =$ sannolikhetsdicht i lägesrummet

$|\psi(\mathbf{p})|^2 =$ — " — rörelse impulsrummet (RM-rummet)

1 lägesrummet har vi som tidigare

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{p}} = -i\hbar \nabla_{\mathbf{r}} \\ \hat{\mathbf{r}} = \text{multiplikation} \end{cases}$$

I impulsrummet verkar dessa som operatörer på $\tilde{\Psi}$:

$$\begin{cases} \hat{p} = \text{multiplikation} \\ \hat{r} = +i\hbar \nabla_p \end{cases}$$

deriv. map komponenterna av p

En viktig skillnad:

Ändlig volym

$$\begin{cases} \text{ON-bas } \Psi_p \text{ av tillst. i } \mathcal{H} \\ \langle \Psi_p | \Psi_{p'} \rangle = \delta_{p,p'} = \begin{cases} 1 & p=p' \\ 0 & p \neq p' \end{cases} \end{cases}$$

Oändlig volym

$$\begin{cases} \text{Vi kan kanske införa } \Psi_p \\ \text{men dessa är inte element i } \mathcal{H}. \\ \text{Norm. villkor lyder:} \\ \langle \Psi_p | \Psi_{p'} \rangle = \delta(p-p') \end{cases}$$

I lägesrummet

$$\begin{cases} \hat{p} = -i\hbar \nabla & (\text{derivering}) \\ \hat{r} = r & (\text{multipl.}) \end{cases}$$

$$\hookrightarrow \text{t.ex.} \quad \begin{cases} \hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \\ \hat{r}_x = x \end{cases}$$

Kommuterar dessa med varandra?

Låt kommutatorn verka på godtyckligt Ψ

$$\begin{aligned} [\hat{r}_x, \hat{p}_x] \Psi &= (\hat{r}_x \hat{p}_x - \hat{p}_x \hat{r}_x) \Psi \\ &= \hat{r}_x (-i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial x}) - (-i\hbar \frac{\partial}{\partial x})(x \Psi) \\ &= -i\hbar x \frac{\partial \Psi}{\partial x} + i\hbar (\Psi + x \frac{\partial \Psi}{\partial x}) \\ &= i\hbar \Psi \\ &= i\hbar \hat{I} \Psi \quad \text{dvs} \quad [\hat{r}_x, \hat{p}_x] = i\hbar \hat{I} \end{aligned}$$

$$\{ \text{P.S.S} \} \quad [\hat{r}_y, \hat{p}_y] = [\hat{r}_z, \hat{p}_z] = i\hbar \hat{I}$$

men $[\hat{r}_x, \hat{r}_y] = 0$ osv...

$[\hat{p}_x, \hat{p}_y] = 0$ osv....

Övning: visa att t.ex. $[\hat{r}_x, \hat{p}_x] = i\hbar \hat{I}$ gnm. att göra
räkningen i BM-rummet med godtyckligt $\tilde{\Psi}(p)$

Hur kan man hitta bra operatörer $\hat{A}, \hat{B}$ verkande på
något tillståndsrum $\mathcal{H}$ s.a.

$$[\hat{A}, \hat{A}] = [\hat{B}, \hat{B}] = 0 \quad \text{själklart!}$$

$$[\hat{A}, \hat{B}] = i\hbar \hat{I} \quad \text{CCR}$$

Teorem (stone - von Neumann)

Det finns egentligen bara en lösning:

Låt $\mathcal{H} = \{ \text{vägfkn. } \Psi \text{ av en variabel } A \}$

$$\begin{cases} \hat{A} = A & \text{multipl.} \\ \hat{B} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial A} & \text{derivering} \end{cases}$$

Man kan dock göra basbyte i $\mathcal{H}$.

Ett exempel är att istället arbeta med vägfunktioner
 $\tilde{\Psi}$ av B . Detta är alltså egentligen samma konstruktion.

Ex. Harmonisk oscillator

$$\text{Här är } \hat{A} = \sqrt{\frac{\hbar}{2}} (\hat{x} + \hat{x}^\dagger)$$

$$\hat{B} = -i\sqrt{\frac{\hbar}{2}} (\hat{x} - \hat{x}^\dagger)$$

skapelseop.
förtäringop.

som uppfyller CCR.

Vi representerar detta enligt Stone-von Neumann.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Grundtillstånd } \psi_0 \text{ s.a. } \hat{x}\psi_0 = 0. \\ \text{Övriga tillstånd } \psi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{x}^\dagger)^n \psi_0. \end{array} \right.$$

Dessa utgör alltså ON-bas för $\mathcal{H}$.

Hur ser motsvarande vågfunktioner $\psi_n(A)$ ut?

$$0 = \hat{x}\psi_0 = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} (\hat{A} + i\hat{B})\psi_0$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left(A + i \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial A} \right) \right) \psi_0(A)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left(A + \hbar \frac{\partial}{\partial A} \right) \psi_0(A)$$

Första grundtillståndet!

med lösningen

$$\psi_0(A) = \frac{1}{(\pi\hbar)^{1/4}} \exp\left(-\frac{1}{2\hbar} A^2\right)$$

Övriga tillstånd har vågfunktioner

$$\psi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{X}^+) ^n \psi_0$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(\frac{1}{\sqrt{2\hbar}} (\hat{A} - i\hat{B}) \right)^n \psi_0(A)$$

⋮

$$= \frac{1}{(\pi\hbar)^{1/4} \sqrt{2^n n!}} H_n \left(\frac{1}{\sqrt{\hbar}} A \right) \exp\left(-\frac{1}{2\hbar} A^2\right)$$

Hermite polynom av gradtal n

Heisenbergs osäkerhetsrelation

Om två operatörer kommuterar med varandra så är motsvarande storheter samtidigt mätbara.

Vi kan införa en bas i tillståndsrummet av egentillstånd till båda operatörerna.

Vad händer med operatörerna $\hat{A}, \hat{B}$ som uppfyller

$$[[\hat{A}, \hat{B}] = i\hbar \hat{I} ?$$

Mätbara storheter A, B , ~~kan~~ kan då inte vara samtidigt värdetvinnande för ett och samma tillstånd.

Hur små kan osäkerheterna i A, B vara?

Förväntningsvärdena i tillstånd ψ är

$$E(A) = \bar{A} = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle$$

$$\bar{B} = \langle \psi | \hat{B} | \psi \rangle$$

Varianserna är

$$(\Delta A)^2 = E((A - \bar{A})^2) = \langle \psi | (\hat{A} - \bar{A} \hat{I})^2 | \psi \rangle$$

$$(\Delta B)^2 = \langle \psi | (\hat{B} - \bar{B} \hat{I})^2 | \psi \rangle$$

Vad blir dessa — dessa blir beror på ψ

Men ΔA ^{liken} ~~stor~~ $\Rightarrow \Delta B$ stor, och vice versa.

Heisenbergs osäkerhetsrelation

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{\hbar}{2} \quad \text{för alla } \psi$$

↑
likhet för vissa ψ