Centralrörelse

Tors LV6

En partikel med massa m rör sig i en potential V.

$$\frac{\partial V}{\partial t} = 0 \longrightarrow \text{tidsinvarians} \xrightarrow{\text{Noether}} \text{bevarad energi } E = \frac{\mathbb{P}\cdot\mathbb{P}}{2m} + V(\mathbb{r})$$

$V(\mathbb{r}) = V(r)$ där r = avst. till origo O { Centralkrafts-potential }

↳ Riktning spelar inte roll, endast avstånd!

$$\longrightarrow \text{Rotationsinvarians (kring O)} \xrightarrow{\text{Noether}} \text{Bevarat rörelsemängdsmoment } \mathbb{L} = \mathbb{r} \times \mathbb{P}$$

Kontroll: $$\frac{\partial \mathbb{L}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbb{r}}{\partial t} \times \mathbb{P} + \mathbb{r} \times \frac{\partial \mathbb{P}}{\partial t} = \cancel{\mathbb{V} \times m\mathbb{V}} + \mathbb{r} \times \mathbb{F}$$

{ ty två parallella vektorer! kryssprod. blir noll }

↑ Newton II

$$= \mathbb{r} \times (-\nabla V)$$

$$= 0$$ ← centralkraft

Varje lösning till rörelse ekv. ~~Kra~~ karaktäriseras av sitt värde på $\mathbb{L}$.

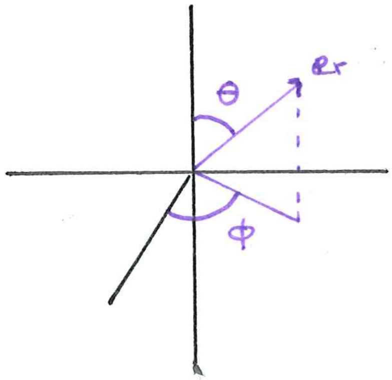
Givet detta $\mathbb{L}$ kan vi skriva om energin enligt:

$$(*) \quad E = \frac{1}{2m} P_r^2 + \frac{L^2}{2m} \frac{1}{r^2} + V(r)$$

{ anv. vektor analys! }

↖ den radiella komp. av

$$\mathbb{P} = P_r \mathbb{e}_r + P_\theta \mathbb{e}_\theta + P_\phi \mathbb{e}_\phi$$



(*) ser ut som rörelse i en dimension (med koord. r) under inflytande av potentialen

obs! $r > 0$

$$V_{\text{effektiv}}(r) = \frac{L^2}{2m} \frac{1}{r^2} + V(r)$$

"repulsiv centrifugalbarriär"

"trycker ifrån" när vi närmar oss origo!

I kvantfysiken:

Tillståndsrum $\mathcal{H} = \{ L^2\text{-funktioner } \psi \text{ av läget } \mathbf{r} \}$

Inre produkt $$\langle \psi | \psi' \rangle = \int_{\text{rummet}} d^3\mathbf{r} \, \overline{\psi(\mathbf{r})} \, \psi'(\mathbf{r})$$

Beskrivet läget $\mathbf{r} = r \cdot \mathbf{n}$ med sfäriska koordinater

r, θ, ϕ

radiell enhetsvektor beskrivs av θ och ϕ

Volymsmåttet $$d^3\mathbf{r} = dx\,dy\,dz = r^2 dr \underbrace{\sin\theta \, d\theta \, d\phi}_{d^2\mathbf{n}}$$

tensorprodukt

Vi kan skriva $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{radiell}} \otimes \mathcal{H}_{\text{vinkel}}$ med

$$\begin{cases} \mathcal{H}_{\text{radiell}} = \{ \text{Fkner } R \text{ av radiella koord. } r \} & \langle R | R' \rangle = \int_0^\infty r^2 dr \, \overline{R} R' \\ \mathcal{H}_{\text{vinkel}} = \{ \text{Fkner } Y \text{ av vinkelkoord. } \theta, \phi \} & \langle Y | Y' \rangle = \int_0^\pi \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \times \overline{Y} Y' \end{cases}$$

Så ett godtyckligt $\psi \in \mathcal{H}$ kan skrivas som en summa av produkttillstånd RY, $R \in \mathcal{H}_{\text{radiell}}$, $Y \in \mathcal{H}_{\text{vinkel}}$

$$\psi(\mathbf{r}) = \sum_i R_i(r) \, Y_i(\theta, \phi)$$

{Separation av variabler}

Om vi vill kan vi införa en ny funktion $\tilde{R}$ av radiella koord. r definierad enligt

$$R(r) = r^{-1}\tilde{R}(r)$$

vi har ~~$\mathcal{H}$ radiell~~ $\mathcal{H}_{radiell} = \{$ sådana funktioner $\tilde{R}$ av $r\}$

skalärprod. blir då

$$\langle \tilde{R} | \tilde{R}' \rangle = \int_0^\infty dr \; \overline{R(r)} \; R'(r)$$

$\mathcal{H}_{radiell}$: Tillstånd i detta rum kan representeras antingen genom funktioner R eller funktioner $\tilde{R}$.
skalärprodukten mellan två sådana tillstånd ges av

$$\langle \; | \; ' \rangle = \int_0^\infty r^2 dr \; \overline{R(r)} \; R'(r) = \int^\infty dr \; \overline{\tilde{R}(r)} \; \tilde{R}'(r)$$

Hamiltonoperatorn $\quad \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(r)$

↖ laplaceoperatorn verkande på vågfkn $\psi(\mathbf{r})$

Hur verkar ∇^2 på tillstånd i

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{radiell} \otimes \mathcal{H}_{vinkel} \quad ?$$

$$\nabla^2(RY) = \nabla^2 R \, Y + R \, \nabla^2 Y$$

inga korstermer!

$$\text{med} \begin{cases} \nabla^2 R = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r}\right) \\ \nabla^2 Y = \frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{dY}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2}\right) \end{cases}$$

linjaritet

Skriv om $\hat{H}$ verkande på $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{radiell}} \otimes \mathcal{H}_{\text{vinkel}}$

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)\otimes\hat{I} - \frac{\hbar^2}{2m}\hat{I}\otimes\frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{\sin\Theta}\cdots\right) + V(\hat{r})\otimes\hat{I}$$

$$= \frac{1}{2m}\hat{P}_r^2\otimes\hat{I} + \frac{1}{2m}\frac{1}{\hat{r}^2}\otimes\hat{\mathbb{L}}\cdot\hat{\mathbb{L}} + V(\hat{r})\otimes\hat{I}$$

där $\hat{P}_r^2 = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)$ {operatorn svarade mot kvadraten på radiella komponenten av rörelsemängden}

$$\hat{\mathbb{L}}\cdot\hat{\mathbb{L}} = -\hbar^2\left(\frac{1}{\sin\Theta}\frac{\partial}{\partial\Theta}\left(\sin\Theta\frac{\partial}{\partial\Theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\Theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right)$$

{svarar mot kvadraten på rörelsemängdsmomentet}

Antag att vi vet egenvärdet för operatorn $\hat{\mathbb{L}}\cdot\hat{\mathbb{L}}$ (nästa föreläsning!)

Beteckna det med L^2.

Alltså → $$\hat{\mathbb{L}}\cdot\hat{\mathbb{L}}\,Y = \overset{\text{egenvärde}}{L^2}\,\underset{\text{egenfkn.}}{Y}$$

Då är $$\hat{H}\left(\overset{\text{godtycklig}}{R}\otimes\underset{\text{egenfkn. enl. ovan}}{Y}\right) = \left(\hat{H}_{\text{radiell}}R\right)\otimes Y$$

med $$\hat{H}_{\text{radiell}} = \frac{1}{2m}\hat{P}_r^2 + \underbrace{V_{\text{effektiv}}(\hat{r})}_{=\frac{L^2}{2m}\frac{1}{r^2}+V(r)}$$

$\hat{H}$ radiell verkar på en funktion R av läget

Skriv $R = \frac{1}{r}\tilde{R}$ ⟹ $\hat{H}_{radiell} R = \ldots = r^{-1}\underbrace{\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial r^2} + V_{eff.}(\hat{r})\right)}_{\hat{A}}\tilde{R}$

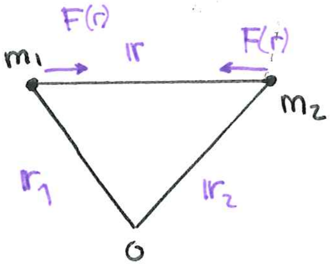
$\tilde{R}$ är egenfunktion till $\hat{A}$ med ett visst egenvärde

↳ R egenfunktion till $\hat{H}_{radiell}$ med samma egenvärde!

Appendix om tvåkroppars problemet (reduced mass)

Två partiklar med massor m_1 och m_2 och ortsvektorer $\mathbb{r}_1$ och $\mathbb{r}_2$ ~~mef~~ map O (fix punkt) attraherar varandra med en kraft vars storlek bara beror på avståndet

$r = |\mathbb{r}| = |\mathbb{r}_1 - \mathbb{r}_2|$ mellan dem.



Frågeställn. Är detta ett centralkrafts-problem?

Kanske minns man mekaniken att detta problem är ekvivalent med två problem som är oberoende av varandra.

① Dels ett prob. som handlar om tyngdpunktens rörelse

Tyngdpunktens ortsvektor är $\mathbb{R} = \frac{m_1\mathbb{r}_1 + m_2\mathbb{r}_2}{m_1+m_2}$

och uppfyller $M\ddot{\mathbb{R}} = 0$ $\left\{ \text{Newton II för part. med massa } M = m_1+m_2 \text{ som inte påverkas av ngn yttre kraft} \right\}$

② Dels ett problem som handlar om en fiktiv partikel med massa $m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ $\left\{ \begin{matrix} \text{reducerade massan} \\ m < m_1,\ m < m_2 \end{matrix} \right\}$

och lägeskoordinat $\mathbb{r}$ som rör sig i en centralkraft $\mathbb{F}(\mathbb{r})$