

Rotationer

Partikel i rummet

Läge $\hat{\mathbf{r}} = \hat{r}_x \mathbf{i} + \hat{r}_y \mathbf{j} + \hat{r}_z \mathbf{k}$

B.M. $\hat{\mathbf{p}} = \hat{p}_x \mathbf{i} + \hat{p}_y \mathbf{j} + \hat{p}_z \mathbf{k}$

kanoniska kommuteringsrelationer

$$\begin{cases} [\hat{r}_x, \hat{p}_x] = i\hbar \hat{I} & \text{osv.} \\ [\hat{r}_x, \hat{r}_y] = 0, [\hat{r}_x, \hat{p}_y] = 0 & \text{osv.} \end{cases}$$

Hur fungerar r.m.moment $\hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{p}}$?

↳ t.ex. $\hat{L}_x = \hat{r}_y \hat{p}_z - \hat{r}_z \hat{p}_y$

kommuteringsrelationer:

$$[\hat{L}_x, \hat{p}_y] = [\hat{r}_y \hat{p}_z - \hat{r}_z \hat{p}_y, \hat{p}_y]$$

$$= \hat{r}_y \hat{p}_z \hat{p}_y - \hat{p}_y \hat{r}_y \hat{p}_z = \hat{r}_y \hat{p}_y \hat{p}_z - \hat{p}_y \hat{r}_y \hat{p}_z$$

$$= [\hat{r}_y, \hat{p}_y] \hat{p}_z$$

$$\{ \text{P.S.S} \} [\hat{L}_x, \hat{r}_y] = \dots = i\hbar \hat{r}_z$$

↑ "nyttig övning"

{ se ekv. B.2
för sammanfattn. }

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = [\hat{L}_x, \hat{r}_z \hat{p}_x - \hat{r}_x \hat{p}_z] =$$

$$= [\hat{L}_x, \hat{r}_z] \hat{p}_x + \hat{r}_z [\hat{L}_x, \hat{p}_x] - [\hat{L}_x, \hat{r}_x] \hat{p}_z - \hat{r}_x [\hat{L}_x, \hat{p}_z]$$

$$= -i\hbar \hat{r}_y \hat{p}_x - \hat{r}_x (-i\hbar \hat{p}_y) = i\hbar \hat{L}_z \quad \left\{ \text{se ekv. 13.3} \right\}$$

Ytterligare en viktig operator:

$$\hat{L}^2 = \hat{L} \cdot \hat{L} = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2$$

Obs! $[\hat{L}^2, \hat{L}_x] = 0$ osv....

Godtyckligt fysikaliskt system med rotationsymmetri

Det finns då operatorer $\hat{J} = \hat{J}_x \hat{i} + \hat{J}_y \hat{j} + \hat{J}_z \hat{k}$
med kommuteringsrelationer

$$[\hat{J}_x, \hat{J}_y] = i\hbar \hat{J}_z \quad \text{osv.}$$

$$[\hat{J}^2, \hat{J}_x] = 0 \quad \text{osv.} \quad \hat{J}^2 = \hat{J} \cdot \hat{J}$$

Ex. Partikel i rummet **spinnlös!**

$$\hat{J} = \hat{L} \quad \text{verkar på}$$

$$\mathcal{H} = \left\{ L^2\text{-fknar } \psi \text{ av läget} \right\}$$

Ex. Ett elektronspinn

$$\hat{J}_x = \frac{\hbar}{2} \sigma_x \quad \text{osv.}$$

↑ Paulimatrix

↑ verkar på ~~ett elektronspinn~~ $\mathcal{H}_{\text{spinn}}$ med dimension 2.

Ex. En elektron med spinn

$$H = H_{\text{l\aa ge}} \otimes H_{\text{spinn}}$$

$$\hat{J}_x = \underbrace{\hat{L}_x}_{\text{totalt moment}} \otimes \underbrace{\hat{I}}_{\text{ban-spinn}} + \hat{I} \otimes \underbrace{\frac{\hbar}{2} \sigma_x}_{\text{spinnar}} \quad (*)$$

L\aa t $\hat{A}, \hat{B}$ vara tv\aa operatorer s.a.

$$[[\hat{A}, \hat{B}] \hat{A}] = [[\hat{A}, \hat{B}] \hat{B}] = 0$$

L\aa t $\hat{f}(t) = \exp(t\hat{A} + t\hat{B} + \frac{t^2}{2}[\hat{A}, \hat{B}])$
en parameter

$$\hat{g}(t) = \exp(t\hat{A}) \exp(t\hat{B})$$

visa att $\hat{f}(t) = \hat{g}(t) \quad \forall t$

om $t=1 \Rightarrow$ 5.16!

t kan skalas bort $t\hat{A} \rightarrow \hat{A}, t\hat{B} \rightarrow \hat{B}$

B\aa ns $\hat{f}(0) = \hat{g}(0) = \hat{I}$ "trivialt"

$$\frac{d}{dt} \hat{f}(t) = (\hat{A} + \hat{B} + t[\hat{A}, \hat{B}]) \hat{f}(t)$$

$$\frac{d}{dt} \hat{g}(t) = \hat{A} \exp(t\hat{A}) \exp(t\hat{B}) + \exp(t\hat{A}) \hat{B} \exp(t\hat{B})$$

Men.

$$\exp(t\hat{A})\hat{B} = \hat{B}\exp(t\hat{A}) + t[\hat{A}, \hat{B}]\exp(t\hat{A})$$

↑ Taylorutveckla $\exp(t\hat{A})$

$$= (\hat{A} + \hat{B} + t[\hat{A}, \hat{B}]) \exp(t\hat{A}) \exp(t\hat{B})$$

$$= (\hat{A} + \hat{B} + t[\hat{A}, \hat{B}]) \hat{g}(t) \quad \Rightarrow \quad \hat{f}(t) = \hat{g}(t)$$

Finn tillståndsrum $\mathcal{H}$ och operator

$$\hat{J}_x, \hat{J}_y, \hat{J}_z : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \quad \text{så att}$$

$$[\hat{J}_x, \hat{J}_y] = i\hbar \hat{J}_z \quad \text{osv.} \quad (\#)$$

Eftersom $[\hat{J}^2, \hat{J}_z] = 0$ så kan vi införa en bas i $\mathcal{H}$ av tillstånd som är egentillstånd till både $\hat{J}^2, \hat{J}_z$

$$\begin{aligned} \text{Inför} \quad \hat{J}_+ &= \hat{J}_x + i\hat{J}_y \\ \hat{J}_- &= \hat{J}_x - i\hat{J}_y \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \nearrow \\ \searrow \end{array} \right\} \text{hermitekonjugat}$$

$$\text{Men då} \quad [\hat{J}_z, \hat{J}_+] = \hbar \hat{J}_+$$

$$[\hat{J}_z, \hat{J}_-] = -\hbar \hat{J}_-$$

$$[\hat{J}_+, \hat{J}_-] = 2\hbar \hat{J}_z$$

ekvivalent
med $(\#)$

$\hat{J}_+$ höjer $\hat{J}_z$ -egenvärdet med $\hbar$:

Antag att $\hat{J}_z \psi = \lambda \psi$ ← egentillstånd
← egenvärde

Låt $\psi' = \hat{J}_+ \psi$

Då är

$$\hat{J}_z \psi' = \hat{J}_z \hat{J}_+ \psi = (\hat{J}_+ \hat{J}_z + [\hat{J}_z, \hat{J}_+]) \psi$$

$$= \hat{J}_+ \lambda \psi + \hbar \hat{J}_+ \psi = (\lambda + \hbar) \hat{J}_+ \psi = (\lambda + \hbar) \psi'$$

nytt egenvärde

egen-tillstånd

På samma sätt sänker $\hat{J}_-$ egenvärdet med $\hbar$

↳ Måste kräva att $\hat{J}_z$ har ett högsta och lägsta egenvärde

Resultat:

Spinnet j kan ta icke-negativa hel eller halv-taliga värden

$$j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$$

Motsvarande tillståndsrum betecknar vi med $\mathcal{H}_j$

$$\text{vi har } \dim \mathcal{H}_j = 2j + 1$$

Det finns en ON-bas för $\mathcal{H}_j$ med element

$$\psi_m, \quad m = -j, -j+1, -j+2, \dots, j-2, j-1, j$$

Dessa är egentillstånd till $\hat{J}^2$ och $\hat{J}_z$:

$$\begin{cases} \hat{J}^2 \Psi_m = \hbar^2 j(j+1) \Psi_m \\ \hat{J}_z \Psi_m = \hbar m \Psi_m \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{J}_+ \Psi_m = \hbar \sqrt{(j-m)(j+m+1)} \Psi_{m+1} & \text{obs! } \hat{J}_+ \Psi_{m=j} = 0 \\ \hat{J}_- \Psi_m = \hbar \sqrt{(j+m)(j-m+1)} \Psi_{m-1} & \hat{J}_- \Psi_{m=-j} = 0 \end{cases}$$

Ex.

$$j=0, \dim \mathcal{H}_0 = 1$$

rotationsinvariant tillstånd

$$j = \frac{1}{2}, \dim \mathcal{H}_{\frac{1}{2}} = 2$$

elektronspinn

Hur är det med en spinnlös partikel i rummet?

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\text{läge}} &= \{L^2\text{-funktioner av } r\} \\ &= \{L^2\text{-funktioner av avstånd } r\} \otimes \{L^2\text{-fktor av vinklar } \theta, \phi\} \\ &= \mathcal{H}_{\text{radial}} \otimes \mathcal{H}_{\text{vinkel}} \end{aligned}$$

Rotationer verkar inom $\mathcal{H}_{\text{vinkel}}$

Man kan visa att $\mathcal{H}_{\text{vinkel}} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \dots$

$$= \bigoplus_{j=0}^{\infty} \mathcal{H}_j \quad j \text{ heltal}$$

Det skall alltså finnas en ON-bas av funktioner

$$Y_L^m \text{ av } \phi, \theta \quad L=0,1,2,3,\dots \quad (\text{även kallat } j)$$

$$m = -L, -L+1, \dots, L-1, L$$

Y_L^m för fixt L spänner $\mathcal{H}_L$

Ta med alla L för att få bas för hela $\mathcal{H}_{\text{unkel}}$

Hur ser $Y_L^m(\theta, \phi)$ ut?

Enklarest att se θ, ϕ som koordinater på enhets sfären

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

utvidga Y_L^m till fkn. ^{På} ~~med~~ hela rummet av gradtal L .

{ kolla $Y_{L=0}^{m=0}, Y_{L=1}^{m=-1}, Y_{L=1}^{m=0}, Y_{L=1}^{m=1}$ i boken }

$\hookrightarrow$ utgör en ON-bas för $\mathcal{H}_{\text{unkel}}$!

klotytfunktioner (spherical harmonics)

Dessa är egenfknar till $\hat{L}_z = \hat{r}_x \hat{p}_y - \hat{r}_y \hat{p}_x$

$$= -i\hbar(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x})$$

sfäriska
koord.

$$\text{och } \hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2$$

$$= -\hbar^2 \left(\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \right)$$

Laplace-oper. på sfären

$$L_z Y_L^m = \hbar m Y_L^m$$

$$L^2 Y_L^m = \hbar^2 j(j+1) Y_L^m$$

