TENTAMEN I FASTA TILLSTÅNDETS FYSIK F3/KF3 – FFY011

Tid: 2012-08-24 kl. 08.30
Lokal: VV- salar

Hjälpmedel: Physics Handbook, egen formelsamling på ett A4 blad (fram och baksidan), typgodkänd räknare eller annan räknare i fickformat dock utan inprogrammerad text eller ekvationer av intresse för tentan.
Kursbetyget är baserat på <u>summan</u> av tentamenspoängen +40 % av duggapoängen. Gränserna är: 10p≤3<14p, 14p≤4<17p, 5≥17p. Granskningen: 13/9 kl 12-13 i F5002.
Examinatorer:
Igor Zoric tel: 031 772 3371, 0708 30 47 25
Mats Granath tel: 031 786 9026, 0766 229026

Uppgifter:

1. Den en sällsynta jordartsmetallen ytterbium(Yb) har fcc kristallstruktur med den kubiska gitterparametern 5,48 Å.

a) Hur stort är planavståndet mellan de planskaror som ges av Millerindex (121) i den kubiska enhetscellen hos Yb? (1p)

b) Ett polykristallint prov av Yb skall analyseras med hjälp av röntgendiffraktion och man vill använda röntgenstrålar med våglängden 1,54051 Å. Vid vilka vinklar ser man de 5 första topparna? (3p)

2. Figuren nedan visar fonondispersionsrelationen for Yb vid temperaturen 295^{0}K, uppmätt i ett antal olika riktningar i en Yb enkristall. Med hjälp av uppmätta fonondispersionrelationen och informationen i figurtexten beräkna:

a) Vågtalet för BZ-gränsen i L-riktningen för Yb uttryckt i m^{-1}? (1p)

b) I vilken av de tre riktningarna $(\xi 00)$, $(\xi\xi 0)$ respektive $(\xi\xi\xi)$ är ljudutbredningsfarten för longitudinella vågor störst? Det krävs en uträkning av ljudfarten i vardera fallet för full poäng på uppgiften (1p)

c) Uppskatta Debytemperaturen θ_D för Yb ur fonondispersionsrelationen? (1p)

d) Vad är ett rimligt värde på värmekapaciteten för Yb vid 3 K respektive vid 30 K? (1p)

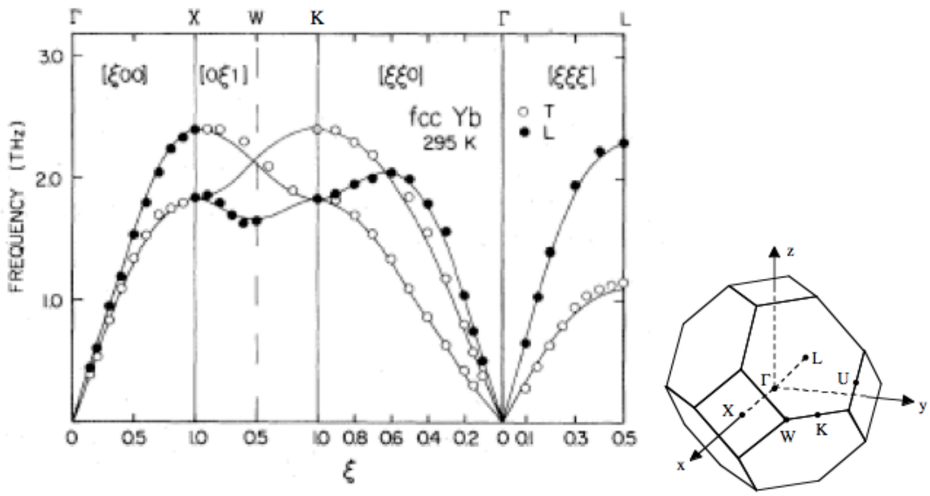
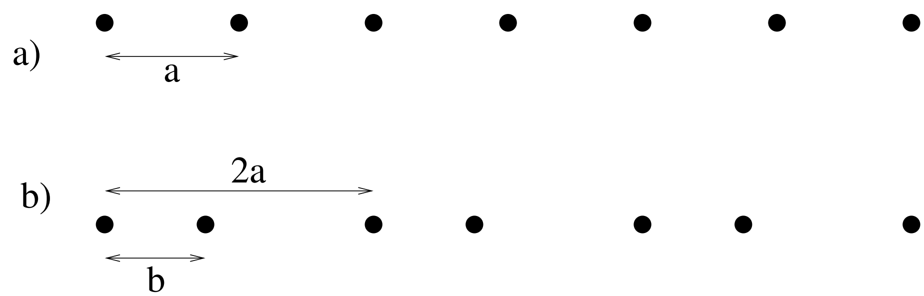


Fig. 1: Fonondispersionsrelationen för Yb vid temperaturen 295 K uppmätt i ett antal olika riktningar i en enkristall (punkterna i figuren är mätvärden från inelastisk neutronspridning och linjerna i figuren är värden från teoretiska beräkningar av fonondispersionsrelationen). Bokstaven Γ *är origo i reciproka rummet och de övriga bokstäverna motsvarar punkter på ytan av 1:a Brillouinzon till ett fcc-gitter, vilken visas i figuren till höger. Alla avstånd i fonondispersionsrelationen är valda så att* $\xi = 1$ *är ett avstånd i reciproka rummet på* $2\pi/a$. Ofyllda cirklar anger transversella akustiska fononer och fyllda cirklar anger longitudinella akustiska fononer.

Uppgift 3

Betrakta ett en-dimensionellt material bestående av ett regelbundet gitter (en kedja) av atomer på avstånd a.



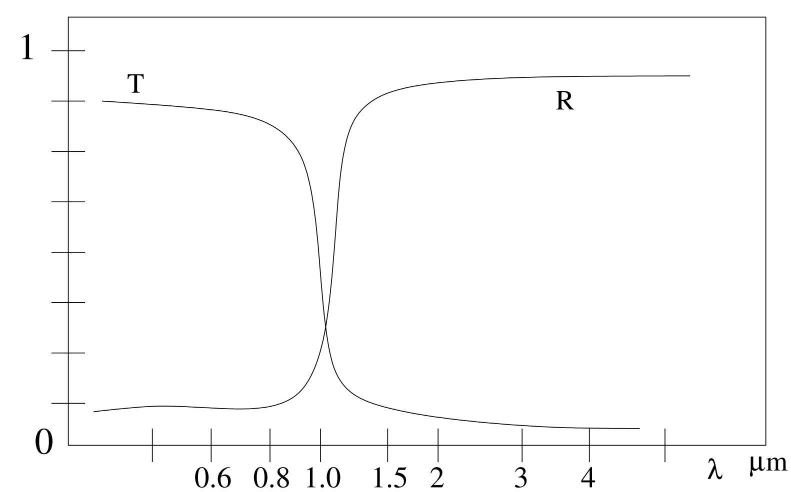
a) Med utgångspunkt i frielektronapproximationen skissa bandstrukturen för materialet under förutsättning att gitterpotentialen är svag. Rita de tre lägsta banden i första Brillouinzonen. (2p)

b) Under vissa förutsättningar kan en instabilitet uppstå i materialet som gör att atomerna parvis attraheras mot varandra. Skissa hur bandstrukturen förändras. (1p)

c) Kvalitativt, hur ändras fononspektrat mellan situation (a) och (b)? (1p)

Uppgift 4

Figuren är en skiss över reflektans (R) och transmitittans (T) hos ett tunt skikt av halvledaren In_2O_3. Denna har ett bandgap $E_g = 3.5$eV och effektiv massa för elektroner och hål, $m_e = 0.3$m respektive $m_h = 0.7$m.



a) Givet att den elektromagnetiska responsen helt domineras av elektroner så att hålens bidrag kan försummas, beräkna elektrontätheten i materialet. (Man kan anta att materialet har hög mobilitet, d.v.s. stor relaxationstid τ.) (2p)

b) Beräkna elektrontäthet under antagandet att materialet är en intrinsisk halvledare. Är materialet intrinsiskt eller dopat? (1p)

c) Materialet är användbart för energieffektiva fönster, varför? (1p) (Det korrekta svaret kräver ett mått termodynamik.)

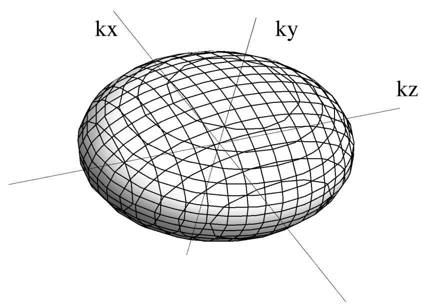
Uppgift 5

Elektroner i ett magnetfält rör sig i banor med konstant energi, vilket ger en möjlighet att mäta effektiva massor för halvledare med hjälp av cyklotronresonans.

Antag att ledningsbandet för en halvledare vid låga energier har konstanta energikurvor som ges av en ellipsoid

$$\epsilon_{\vec{k}} = \frac{\hbar^2}{2m_e}(ak_x^2 + bk_y^2 + ck_x^2)$$

där $a = 2.0$, $b = 3.0$, $c = 1.0$. (Skissat i figuren.)



Beräkna cyklotronfrekvensen ω_c om magnetfältet är i z-led, $\vec{B} = B\hat{z}$, med $B = 0.1$T. (För full poäng krävs härledning av uttrycket.) (4p)

Personnr:	Poäng på uppgiften (ifylls av lärare)	Löpande sidnr: 1
Textat namn:		Uppgift nr:

Tentamen i FTF - FFY011 120824 - Lösningar

1a) Yb - fcc struktur ≡ kubisk struktur ⇒

$$d(hkl) = \frac{a}{\sqrt{h^2+k^2+l^2}} \Rightarrow d(121) = \frac{5.48}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}} = \underline{\underline{2{,}24\,\text{Å}}}$$

1b) Polykristallint prov ⇒ Braggvillkoret kommer att kunna vara uppfyllt för samtliga möjliga reflexer.

För fcc-gitter är strukturfaktorn:

$$S(hkl) = f\left(1 + e^{-i\pi(h+k)} + e^{-i\pi(k+l)} + e^{-i\pi(h+l)}\right)$$

$S \neq 0$ om: alla hkl är udda eller alla hkl är jämna.

Pga: $d = \frac{a}{\sqrt{h^2+k^2+l^2}}$ ⇒ från Bragg's lag

$2d(hkl) \cdot \sin\theta = \lambda$ eller

$$\theta = \arcsin\left(\frac{\lambda}{2a}\sqrt{h^2+k^2+l^2}\right)$$

hkl	$\sqrt{h^2+k^2+l^2}$	θ	
111	$\sqrt{3}$	14,09	första 5 toppar
200	2	16,33	
220	$\sqrt{8}$	23,43	
311	$\sqrt{11}$	27,79	
222	$\sqrt{12}$	29,14	
400	4	34,21	
331	$\sqrt{19}$	37,78	

CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA / GÖTEBORGS UNIVERSITET | Personnr: | Poäng pa uppgiften (ifylls av lärare) | Löpande sidnr: 2

Textat namn: | Uppgift nr:

2a) I L-riktningen har vi vågvektorn $\vec{k} = 0.5\cdot(\xi,\xi,\xi)$

eller $\vec{k} = \frac{1}{2}(\xi,\xi,\xi) = \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{a}, \frac{2\pi}{a}, \frac{2\pi}{a}\right)$

då $\Rightarrow$ $|\vec{k}| = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{2\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{2\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{2\pi}{a}\right)^2} = \frac{\pi\sqrt{3}}{a} = \frac{\pi\sqrt{3}}{5.48\cdot10^{-10}} = \underline{\underline{9{,}93\cdot10^{9}\ m^{-1}}}$

2b) Ljudfarten i de olika riktningar bestäms av lutningen av fonondispersionsrelationen vid låga vågvektortal.

$(\xi 0 0)$ $\quad v = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{2\pi\cdot2\cdot10^{12}}{0.6\cdot1\cdot\frac{2\pi}{5.48\cdot10^{-10}}} \approx 1830\ ms^{-1}$

$(\xi \xi 0)$ $\quad v = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{2\pi\cdot2\cdot10^{12}}{0.4\cdot1\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{2\pi}{5.48\cdot10^{-10}}} \approx 1930\ ms^{-1}$

$(\xi \xi \xi)$ $\quad v = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{2\pi\cdot2\cdot10^{12}}{0.5\cdot0.5\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{2\pi}{5.48\cdot10^{-10}}} \approx \underline{\underline{2530\ ms^{-1}}}$

2c) $k_B\Theta_D = \hbar\omega_D \Rightarrow \Theta_D = \frac{\hbar\omega_D}{k_B}$

Ur figuren ser vi att högsta fononenergi motsvarar $f_{max} = f_D \approx 2{,}4\ THz$

$\Rightarrow \Theta_D = \frac{1.05\cdot10^{-34}\cdot2\pi\cdot2{,}4\cdot10^{12}}{1.38\cdot10^{-23}} \approx \underline{\underline{115\ K}}$

2d) fononernas bidrag vid $T \ll \Theta_D$ ges av

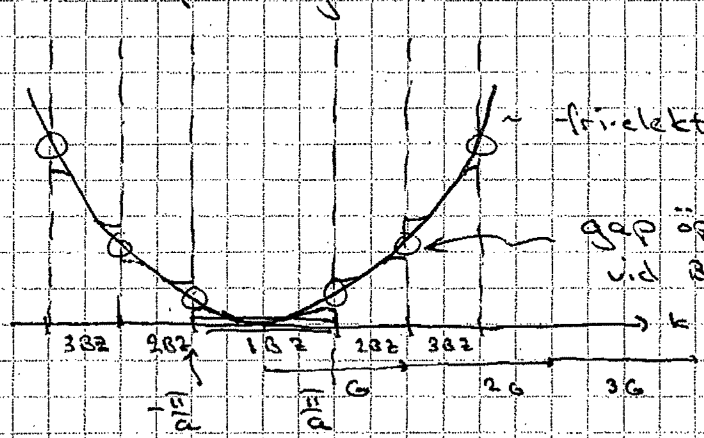
$C_V \approx 234\, N k_B\left(\frac{T}{\Theta}\right)^3$

för $N = N_A \Rightarrow$ molar värmekapacitet

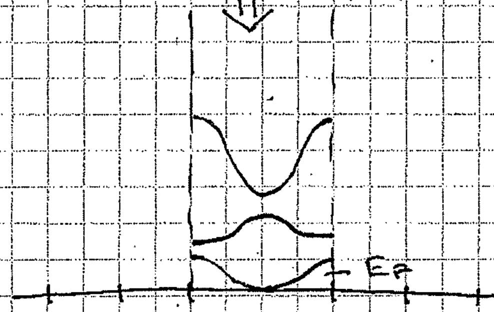
$C_V(3^\circ K) \approx 30\ mJ/mol\ K$

$C_V(30^\circ K) \approx \underline{30\ J/mol/K}$

Uppg. 3 a) Reciprok gittervektor: $G = \frac{2\pi}{a}$



⇓ translatera med G



varje band kan ta två elektroner per k-punkt

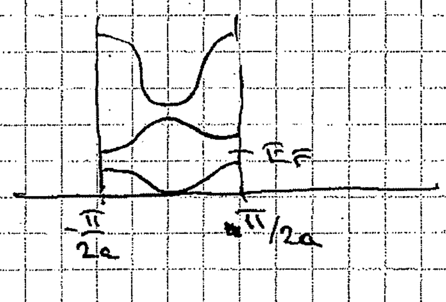
(och 2 elektroner per gitterpunkt)

bandet är halvfullt

⇓

metall

b) Bandstrukturen är samma men nu är $G = \frac{2\pi}{2a} = \frac{\pi}{a}$



nu har vi 2 elektroner per gitterpunkt

⇓

lägsta bandet är fyllt

⇓

isolator

c) i a) finns endast akustiska fonon $\omega(k) \xrightarrow{k\to 0} 0$

i b) finns även en optisk mod $\omega(k) \xrightarrow{k\to 0} \omega_0 > 0$

Uppg. 4 a) EM propagationen bestäms av

$$\varepsilon_r = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad (\text{för små } \vec{q} \text{ och } \omega\tau \gg 1)$$

För att våg ska kunna propagera (T) krävs $\varepsilon_r > 0$, dvs $\omega > \omega_p$.
Vi kan alltså identifiera droppet vid $\lambda \approx 1\,\mu m$ med $\omega_p = 2\pi c/\lambda = 1.9 \cdot 10^{15}\,s^{-1}$

ω_p ges av $\omega_p^2 = \frac{n e^2}{\varepsilon_0 m_e^*} \Rightarrow$ $\boxed{n = \frac{\varepsilon_0 m_e^* \omega_p^2}{e^2} = 3.6 \cdot 10^{26}\,m^{-3}}$

b) Intrinsisk halvledare: $n = p$

ur P.H. $np = n_0 p_0 e^{-E_g/k_B T}$

$n_0/p_0 \approx 4.83 \cdot 10^{21}\, T^{3/2} \left(\frac{m^*}{m}\right)^{3/2} \frac{1}{m^3}$

$$\therefore n = \sqrt{n_0 p_0}\, e^{-E_g/2k_B T} \approx$$

$$\approx 4.83 \cdot 10^{21}\, T^{3/2} \left(\frac{m_e^*}{m}\right)^{3/4} \left(\frac{m_h^*}{m}\right)^{3/4} e^{-E_g/2k_B T}$$

$\approx$ [antag rumstemp. 20°C]

$\approx 5 \cdot 10^{-6}\,m^{-3}$

dvs knappt några intrinsiska laddningsbärare $E_g \gg k_B T$

Materialet är dopat

c) (Termokommentaren i uppg.texten var inte viktig)
~~Om ett material absorberar ... vid en ... det ... bild.~~

Som ett ytskikt på ett fönster släpper det igenom solstrålning ($\omega \gtrsim \omega_p$) men samtidigt reflekteras ~~strålar det inte ut~~ IR ($\omega \lesssim \omega_p$) inifrån, dvs lägre värmeförluster.

Uppg. 5

a) $\hbar \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{F} = -e\vec{v}\times\vec{B}$ R.E. för Blochtillst.

där $\vec{v} = \frac{1}{\hbar}\vec{\nabla}_k \varepsilon_k$ grupphast.

$$\therefore \frac{dv_i}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\hbar}\frac{\partial \varepsilon}{\partial k_i}\right) = \frac{1}{\hbar}\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial k_i \partial k_j}\frac{dk_j}{dt}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{dv_i}{dt} = \underbrace{\frac{1}{\hbar^2}\left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial k_i \partial k_j}\right)}_{\left(\frac{1}{m^*}\right)_{ij}} F_j$$

När har vi $\varepsilon_{\vec{k}} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(ak_x^2 + bk_y^2 + ck_z^2\right)$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial k_x \partial k_x} = \frac{a}{m} \text{ etc.}$$

$\vec{B} = B\hat{z}$ med $\vec{v} = (v_x, v_y, 0) \Rightarrow \vec{F} = -eB(v_y, -v_x, 0)$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= -\frac{a}{m}eBv_y \\ \frac{dv_y}{dt} &= \frac{b}{m}eBv_x \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{d^2v_x}{dt^2} = -\frac{ab}{m^2}e^2B^2v_x$$

med lösningar $v_x = v_0 \cos\omega_c t$

$$\boxed{\omega_c = \sqrt{ab}\,\frac{eB}{m} = \sqrt{6}\,\frac{eB}{m}}$$

b) En cykel: $\Delta t = 2\pi/\omega_c$

Ingen kollision (i genomsnitt) $\Leftrightarrow \tau > \Delta t$

dvs $\tau > \frac{2\pi}{\omega_c}$ $\tau\omega_c > 2\pi$ $(\tau\omega_c \gtrsim 1)$

$$\tau\sqrt{6}\,\frac{eB}{m} > 2\pi \Leftrightarrow B > \frac{2\pi}{\sqrt{6}}\frac{m}{e\tau} = 0.015\text{ T}$$

$$\boxed{B > 0.015\text{ T eller } B > 150\text{ G}}$$