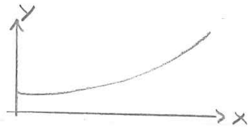
LV3F1

Numeriska metoder

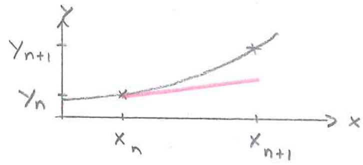
Ex diffekvation: $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = f(x, y \frac{\partial y}{\partial x})$, $x \in [a, b]$

- ODE - IVP : $y(a) = \alpha$, $\frac{\partial y}{\partial x}\Big|_{x=a} = \beta$
- ODE - BVP : $y(a) = \alpha$, $y(b) = \gamma$

Betrakta en diffekvation med följande lösning:



Eulers metod: $y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n) + \mathcal{O}(h^2)$

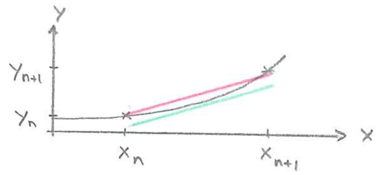


Midpoint Runge-Kutta: (2:a ordningen)

$k_1 = h \cdot f(x_n, y_n)$

$k_2 = h \cdot f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2})$

$y_{n+1} = y_n + k_2 + \mathcal{O}(h^3)$



Felanalys

Lokala fel: Fel pga numerisk metod i varje steg. Beteckning: ε

Globalt fel: Resultat av upprepade lokala fel. Beteckning: e

Hur uppskattas felet då lösningen är okänd?

a) Jämför felet för olika steglängder.

b) Jämför felet från två lösningar av olika ordning där samma konstanter används. Beroende på felskillnaden kan steglängden justeras.

Stabilitet

Explicita metoder har generellt stabilitetsproblem, kräver därför tillräckligt kort steglängd vilket är en begränsning.

Implicita metoder (Ex Euler bakåt: $y_{n+1} = y_n + h f(x_{n+1}, y_{n+1})$) är stabila för alla steglängder.

System av ODE

Om vi har ett system av ordinära diffekvationer, exempelvis en reaktor där vi har $\frac{\partial c_A}{\partial t} = f_1(c_A, T)$ och $\frac{\partial T}{\partial t} = f_2(c_A, T)$, kan vi stega med en explicit metod för att lösa systemet:

$$c_{A,n}, T_n \longrightarrow c_{A,n+1}, T_{n+1} \longrightarrow c_{A,n+2}, T_{n+2} \longrightarrow \dots$$

Styva diffekvationer

En styv diffekvation innehåller termer som gör att lösningen kan variera snabbt. För en styv diffekvation är vissa numeriska lösningsmetoder instabila även vid mycket kort steglängd. Skillnaden i beräkningshastighet mellan olika ode-lösare kan då bli mycket stor.

Kollokation

Ex: $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 6x$. RVI: $y(0)=0$ RVII: $y(1)=1$. $x \in [0,1]$

Försöksfunktion: $y(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2$

$\Rightarrow \frac{\partial y}{\partial x} = a_2 + 2a_3 x \Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 2a_3$

Kollokationspunkt: $x = 0,5$ $\left.\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right|_{x=0,5} = 2a_3 = 6 \cdot 0,5 \Rightarrow a_3 = 1,5$

RVI $\Rightarrow a_1 = 0$ RVII $a_2 + a_3 = 1 \Rightarrow a_2 = -0,5$

$\Rightarrow y(x) = -0,5x + 1,5x^2$ – Överensstämmer med funktionen i randpunkter och kollokationspunkt.