Modellförenklingar (forts från Fö. 5)

Strategier för att förenkla matematiska modeller (forts.)

2. Reducera antalet oberoende variabler

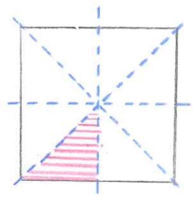
- Symmetrisk geometri, randvillkoren måste vara symmetriska.
  - Rotationssymmetri: 3D → 2D
  - Sfärisk symmetri: 3D → 1D
- Lumping - medelvärdesbilda över en eller flera variabler
  - Ex tankseriemodell, sorels metod.

3. Steady state eller transient

- När olika variabler har olika tidskonstanter kan lösningen förenklas
  - De långsamma variablerna kan antas konstanta när man löser de snabba variablerna, och vice versa.

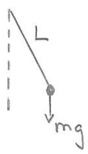
4. Förenklad geometri

- Ekvivalenta sfärer: Förenkla o-sfäriska partiklar till sfäriska partiklar med samma specifika yta och med en s.k. hydraulisk diameter.
- Liknande ytor: När reaktioner bara sker på en yta kan ytan förenklas till en platta.
- Symmetriplan: För symmetriska geometrier kan lösningsarean minskas mha symmetriplan. Randvärden måste vara symmetriska.



5. Linjärisering

- Ex: Pendel



$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = -\frac{g}{L}\sin\theta$$

Taylorserie: $\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \ldots \approx \{\theta \text{ liten}\} \approx \theta \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = -\frac{g}{L}\theta$

6. Försumma termer

- Se exempel i boken: $\frac{D_{ea}}{vL}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial y}{\partial x} - k\tau y = 0$

7. Begränsande fall

- Ex: Fallande kropp. $m\frac{\partial v}{\partial t} - mg + C_D A\frac{\rho v^2}{2} = 0$

- Låg hastighet $\Rightarrow C_D A\frac{\rho v^2}{2} \ll mg \Rightarrow m\frac{\partial v}{\partial t} = mg$

  $\Rightarrow v(t) = gt$ - Överskattar v

- Lång tid $\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial t} \to 0 \Rightarrow v = v_\infty = \sqrt{\frac{2mg}{C_D A\rho}}$ - Överskattar v

Empiriskt modellbyggande

1. Vilka fenomen finns i systemet?
2. Uppskatta vilka variabler som har signifikant betydelse.
3. Uppskatta tidsskalan.
4. Ställ upp ekvationer som inkluderar de viktigaste fenomenen och variablerna samt randvillkor till ekvationen.
5. Förenkla ekvationerna.
6. Lös ekvationerna.
7. Uppskatta vikten av alla termer i ekvationerna.
8. Ta bort oviktiga termer, om nödvändigt lägg till nya.
9. Lös nya ekvationer.
10. Verifiera antaganden.

Dimensionslösa tal

- Använd dimensionslösa tal för både beroende och oberoende variabler. Detta leder till att antalet variabler minskar.

Dimensionssystem – består av ett antal basdimensioner.

Ex basdimensioner: Längd, L, [m]
Massa, m, [kg]
Tid, t, [s]
Temperatur, T, [K]
Entalpi, H, [J]
Substansmängd, N, [mol]

Dimensionen av alla variabler kan uttryckas med basvariabler.

Ex Kraft, $\frac{ML}{t^2}$, $\left[\frac{kg\,m}{s^2}\right]$, Tryck, $\frac{M}{Lt^2}$, $\left[\frac{kg}{m\,s^2} = Pa\right]$

Densitet, $\frac{M}{L^3}$, $\left[\frac{kg}{m^3}\right]$, Ytspänning, $\frac{M}{t^2}$, $\left[\frac{kg}{s^2} = \frac{N}{m}\right]$

Dimensionslösa ekvationer

Ex: Rörelsemängdsbalans: $\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + v\cdot\nabla v\right) = \mu\nabla^2 v + \rho g - \nabla P$ $\left(\frac{kg}{m^2\cdot s}\right)$

$\Rightarrow \frac{\partial\hat{v}}{\partial\hat{t}} + \hat{v}\,\nabla\hat{v} = \frac{1}{Re}\nabla^2\hat{v} + \frac{1}{Fr}\hat{G} - \frac{1}{Eu}\nabla\hat{P}$, där

$Re = \frac{\rho v L}{\mu}$, $Eu = \frac{\Delta P}{\rho v^2}$, $Fr = \frac{\rho L \Delta P}{\rho v^2}$

- Identifiera viktiga variabler
- Dimensionslösa variabler Re, Eu, Fr.

Empiriska modeller

Ex: Värmetransport: $h(T_b - T_w) = k\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=R}$

Syfte: Utreckla en modell som predikterar h, behöver Nu.

- Lista alla variabler för värmetransporten:

$$q = q(k, \Delta T, u, l, \rho, \mu, c_p, \beta g)$$

- Välj ett s.k. återkommande sätt som de andra variablerna kan uttryckes med: $l, \rho, \mu, \Delta T, k$
- Övriga variabler: $q, u, \beta g, c_p$

q: $Nu = \frac{hl}{k} = \frac{q\,hl}{h\Delta T\cdot k}$ $\quad c_p$: $Pr = \frac{c_p\mu}{k}$

u: $Re = \frac{u\rho l}{\mu}$ $\quad \beta g$: $Gr = \frac{\beta g\,\Delta T\,\rho^2\,l^3}{\mu^2}$

$$Nu = Nu(Re, Pr, Gr)$$

Sätt $Nu = b_0 + b_1 Re^{\alpha_1}\cdot Pr^{\beta_1}\cdot Gr^{\gamma_1} + b_2 Re^{\alpha_2}\cdot Pr^{\beta_1}\cdot Gr^{\gamma_1} + \ldots$

- Utför experiment $\Rightarrow \ldots \Rightarrow$ Ex: Masstransport i sfär

$$Nu = 2 + 0{,}6\,Re^{1/2}\,Pr^{1/3}$$

Uppskalning

Vid uppskalning kan man försöka hålla dimensionslösa tal konstanta, men detta är svårt för stora system. Man kan då studera så kallade hastighetsbestämmande steg.