TENTAMEN I MATEMATISK MODELLERING

Måndagen den 17 januari 1994

Sammanställt av David Frisk, Kf3
Januari 2013

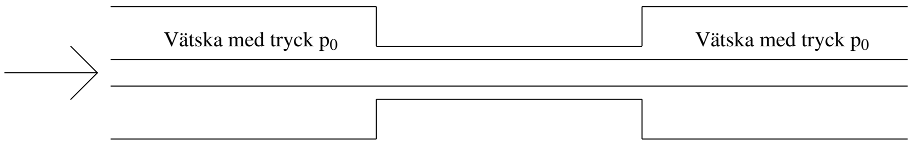
Betygsgränser

Poäng:	0-9.5	10-14.5	15-19.5	20-25
Betyg:	U	3	4	5

Tillåtna hjälpmedel

Skrivdon och valfri räknedosa
TEFYMA tabellen
Physics Handbook
Standard Mathematical Tables
BETA Mathematics Handbook
Handbook och Chemistry and Physics

1. (3p)
En stång med radie δ förs axiellt med hastigheten V genom en vätskefylld cylinder med radie R enligt nedanstående figur. Ställ upp en modell för hastighetsprofilen i spalten under stationära förhållanden genom att stryka termer i den generella transportekvationen (se bilaga) för rörelsemängd. Motivera!



2. (5p)
Härled en modell för den radiella stationära temperaturprofilen i en cylindrisk elektrisk ledning där såväl värmekonduktivitet k=k(T) $(J/m \cdot s \cdot K)$ som elektrisk konduktivitet $k_e = k_e(T)(\Omega^{-1} \cdot m^{-1})$ beror av temperaturen.

Värmeutveckling p.g.a. degraderingen av elektrisk energi ges av

$$S_e = \frac{I^2}{k_e}(J/m^3 \cdot s)$$

där strömtätheten ges av

$$I = k_e \frac{E}{L}(A/m^2)$$

(E/L är spänningsfallet per längdenhet = konstant) Antag konstant temperatur vid ytterytan. Lösning av modellen krävs ej.

3. (5p)
En fallskärmshoppande övningsassistent lånade ut sin fallskärm till sin professor som hoppar ut från en stillastående helikopter på 600 meters höjd. Tyvärr glömde assistenten att berätta hur skärmen utlöses. Hur lång tid har professorn på sig att lista ut hur han ska lösa ut fallskärmen om denna måste lösas ut på minst 100 meters höjd? Lös ekvationen med enpunkts kollokation. Motivera valet av basfunktion och kollokationspunkt.

Fallet utan fallskärm kan beskrivas med följande differentialekvation:

$$m\frac{dv}{dt} + C_D A \frac{\rho v^2}{2} - V(\rho_p - \rho)g = 0$$

där

Kroppens massa:	m=85 kg
Kroppens densitet:	$\rho_p = 1000 kg/m^3$
Luftens densitet:	$\rho = 1 kg/m^3$
Terminalhastighet:	$v_\infty = 55 m/s$
Kroppens volym:	V

4. (4p)
Gör lämpliga approximationer i differentialekvationen från föregående uppgift så att differentialekvationen går att lösa analytiskt. Finn en lösning som överskattar tiden och en lösning som underskattar tiden.

5. (5p)
Arneman och Kruse mätte den dynamiska viskositeten μ för CF_2ClCH_3, även kallat R142b, och erhöll därvid följande resultat för vätska längs mättnadslinjen:

T (K)	$\mu (\mu Pas)$
352.45	134.6
333.35	160.2
313.15	200.4
293.15	248.9
273.18	307.2
252.15	387.1
239.35	487.9

En ofta använd modell för denna typ av ämnen är

$$\mu = \frac{A}{\frac{1}{C - \frac{T}{T_c}} - B}$$

där T_c=410.5 K och C=1.4 för R142b. Parametrarna A och B har bestämts till 116.1 μPas respektive 0.982. Residualkvadratsumman blev 257.5 $(\mu Pas)^2$.

Beräkna approximativa individuella 95% konfidensintervall för A och B samt deras korrelationkoefficient.

Ledning: Några av nedanstående summeringar kan eventuellt vara till nytta. I dessa summor är μ_i det med modellen beräknade värdet för punkten i.

$$\sum_{i=1}^{7} \mu_i = 1925 \mu Pas$$

$$\sum_{i=1}^{7} \mu_i^2 = 6.279 * 10^5 (\mu Pas)^2$$

$$\sum_{i=1}^{7} \mu_i^3 = 2.328 * 10^8 (\mu Pas)^3$$

$$\sum_{i=1}^{7} \mu_i^4 = 9.397 * 10^{10} (\mu Pas)^4$$

Se även bilaga med tabeller och formler.

6. (3p)
Två olika forskargrupper mätte viskositeten för CF_2ClCH_3, även kallat R134a. Deras resultat ges i nedanstående tabell. Dessa data anpassades till samma modell som i uppgift 5, med skillnaden att här är T_e=374.25 K. Parametrarna bestämdes till A=121.2 och B=1.048.

Gör en residualanalys och kommentera resultatet. Residualerna behöver inte normeras eller studentiseras.

T (K)	$\mu(\mu Pas)$	Group
271.26	278.5	2
273.15	272.8	1
293.15	213.9	1
293.35	211.0	2
313.15	169.7	1
313.15	164.8	2
333.15	135.4	1
333.15	126.7	2

Tenta MatMod 1994-01-17 - David Frisk 2013

1. När stången skjuts följer vätska med stången.

Stationärt tillstånd => Antag laminär strömning och rotationssymmetri.

- Generell transportekvation för rörelsemängd i cylindriska koord.:

$$\rho\left(\cancelto{1}{\frac{\partial v_z}{\partial t}} + v_r \cancelto{2}{\frac{\partial v_z}{\partial r}} + \cancelto{3}{\frac{v_\theta}{r}} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \cancelto{4}{\frac{\partial v_z}{\partial z}}\right) = -\cancelto{5}{\frac{\partial P}{\partial z}} + \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\cancelto{3}{\frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2}} + \cancelto{4}{\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}}\right) + \cancelto{4}{\rho g_z}$$

1. Steady state. 2. Inget flöde i r-riktn. 3. Symmetri.
4. In=ut, ρ konstant. 5. Inget tryckfall.

$$\Rightarrow \quad 0 = \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) = 0$$

- Integration 2 gånger:

$$\Rightarrow \quad r\frac{\partial v_z}{\partial r} = C_1 \quad \Rightarrow \quad v_z(r) = C_1 \ln r + C_2$$

- Randvillkor: No slip => I vätskans gränsskikt rör sig vätskan med samma hastighet som intilliggande yta.

I: $v_z(r=\delta) = v$

II: $v_z(r=R) = 0$

- Insättning av randvillkor ger:

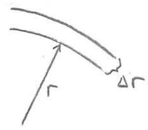
$$\begin{cases} v = C_1 \ln \delta + C_2 & (1) \\ 0 = C_1 \ln R + C_2 & (2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad C_2 = -C_1 \ln R \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{v}{\ln\left(\frac{\delta}{R}\right)} \quad \Rightarrow \quad C_2 = -\frac{v \ln R}{\ln\left(\frac{\delta}{R}\right)}$$

$$\Rightarrow \quad v_z(r) = \frac{v}{\ln\left(\frac{\delta}{R}\right)} \ln r - \frac{v}{\ln\left(\frac{\delta}{R}\right)} \ln R = \frac{v}{\ln\left(\frac{\delta}{R}\right)} \ln\left(\frac{r}{R}\right)$$

Svar: $v_z(r) = \dfrac{v}{\ln\left(\frac{\delta}{R}\right)} \ln\left(\frac{r}{R}\right)$

2. Ställ upp en värmebalans över ett cylindriskt skal:



In - Ut + Bildat = Ack

$$\Rightarrow \quad q \cdot 2\pi r L \Big|_r - q \cdot 2\pi r L \Big|_{r+\Delta r} + S_e \cdot 2\pi r \cdot \Delta r \cdot L = 0 \quad . \quad \text{Dela med } 2\pi L$$

$$\Rightarrow \quad qr\Big|_r - qr\Big|_{r+\Delta r} + S_e r \Delta r = 0$$

$$\Rightarrow \quad -\left(qr\Big|_{r+\Delta r} - qr\Big|_r\right) + S_e r \Delta r = 0 \qquad \text{Dela med } \Delta r$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{q(r+\Delta r) - qr}{\Delta r} + S_e r = 0 \qquad \text{Låt } \Delta r \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{d}{dr}(qr) + S_e r = 0 \qquad (1)$$

▸ Fouriers lag: $q = -k(T)\dfrac{dT}{dr}$

$S_e = \dfrac{I^2}{k_e}$, $I = k_e \dfrac{E}{L}$ $\Bigg\}$ Sätts in i (1)

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dr}\left(r\,k(T)\frac{dT}{dr}\right) + k_e(T)\left(\frac{E}{L}\right)^2 \cdot r = 0$$

Ickelinjär differentialekvation. Lös numeriskt med $k(T)$ och $k_e(T)$ kända.

▸ Randvillkor:

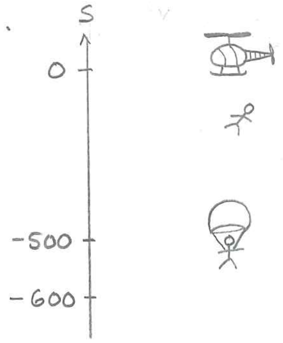
I: $T(r=R) = T_R$ (konstant temperatur vid ytan)

II: $\dfrac{dT}{dr}\Big|_{r=0} = 0$ (symmetri)

<u>Svar:</u>

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dr}\left(r\,k(T)\dfrac{dT}{dr}\right) + k_e(T)\left(\dfrac{E}{L}\right)^2 \cdot r = 0 \\ T(r=R) = T_R \\ \dfrac{dT}{dr}\Big|_{r=0} = 0 \end{cases}$$

3.



$F = ma$

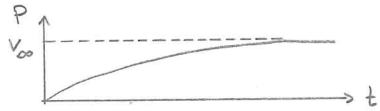
$$\Rightarrow m\frac{dv}{dt} = \underbrace{V(\rho_p - \rho)g}_{\text{Lyftkraft}} - \underbrace{C_D A \frac{\rho v^2}{2}}_{\text{Formmotstånd}}$$

1:a ordningens icke linjär differential ekvation.

- Enpunkts kollokation:

Ansätt funktionen $P(t,a) = V_\infty (1 - e^{-at})$ som uppfyller randvillkoren vid $t=0$ och $t=\infty$ enligt:

$$\begin{cases} P(0) = V_\infty(1-1) = 0 & \text{OK} \\ P(\infty) = V_\infty(1-0) = V_\infty & \text{OK} \\ \frac{dP}{dt} = V_\infty \cdot a\, e^{-at} \end{cases}$$



- Bestäm formmotståndskoefficienten $C_D \cdot A$

Vid V_∞ är $\frac{dv}{dt} = 0$. Diffekvationen blir:

$$0 = V(\rho_p - \rho)g - C_D A \frac{\rho V_\infty^2}{2} \Rightarrow C_D A = \frac{2V(\rho_p-\rho)g}{\rho V_\infty^2} = 0,551$$

- Bestäm kollokationspunkten t_1, $t_1 < t_{kritisk}$

Om $v(t)$ är konstant V_∞ blir tiden $t = \frac{s}{V_\infty} = \frac{500}{55} = 9,1$ s

Det händer mest i början av fallet, då är $\frac{dv}{dt}$ störst $\Rightarrow$ Välj $t_1 = 3$s

- $P(t,a)$ ska uppfylla diffekv i t_1

$$\Rightarrow m \cdot V_\infty a e^{-at} = V(\rho_p - \rho)g - \frac{C_D A}{2}\rho\left(V_\infty(1-e^{-at})\right)^2$$

Iteration, numerisk lösning eller grafisk lösning ger $a = 0,28$

- $P(t) = V_\infty(1 - e^{-at})$. Bestäm $t_{kritisk}$. Vet att $S_{kritisk} = 500$ m

$$S_{kritisk} = \int_0^{t_{kritisk}} v(t)\,dt \approx \int_0^{t_{kritisk}} P(t)\,dt = \int_0^{t_{kritisk}} V_\infty(1-e^{-at})\,dt = \left[V_\infty t + \frac{V_\infty}{a}e^{-at}\right]_0^{t_{kritisk}} =$$

$$= V_\infty t_{krit} + \frac{V_\infty}{a}e^{-at_{krit}} - \frac{V_\infty}{a} = \frac{V_\infty}{a}\left(e^{-at_{krit}} + a t_{krit} - 1\right) = 500$$

$\Rightarrow t_{krit} = 12,6$ s

Svar: $t_{kritisk} = 12,6$ s

4 Gör approximationer i diffekv.

a) Underskatta tiden

- Om $v = v_\infty$ = konstant $\Rightarrow t_{min} = \frac{S_{krit}}{v_\infty} = 9,1\ s$

- Försumma luftmotståndet $\Rightarrow m\frac{dv}{dt} = V(\rho_p - \rho)g \Rightarrow v(t) = \frac{V(\rho_p-\rho)gt}{m}$ (1)

$$S(t) = \int_0^t v(t)\,dt = \frac{V(\rho_p-\rho)g}{m}\cdot\frac{t^2}{2} \overset{(2)}{\Rightarrow} t_{min} = \sqrt{\frac{2m\,S_{kritisk}}{V(\rho_p-\rho)g}} = 10,1\ s$$

- Antag inget luftmotstånd tills $v = v_\infty$, sedan $v = v_\infty$

  - (1) $\Rightarrow t(v_\infty) = \frac{v_\infty \cdot m}{V(\rho_p-\rho)g} = 5,6\ s$ (tid för att nå v_∞)

  - Sträcka tills $v = v_\infty$: (2) $\Rightarrow S = \frac{V(\rho_p-\rho)g}{2m}\cdot t(v_\infty)^2 = 154\ m$

$$t_{rest} = \frac{S_{tot} - S}{v_\infty} = 6,3\ s$$

$$\Rightarrow t_{min} = t(v_\infty) + t_{rest} = \underline{\underline{11,9\ s}}$$

b) Överskatta tiden

- $$m\frac{dv}{dt} + C_D A \frac{\rho}{2}\overbrace{v_\infty \cdot v(t)}^{\sim \text{ överskattning av luftmotståndet}} - V(\rho_p-\rho)g = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} + \underbrace{\frac{C_D A \rho v_\infty}{2m}}_{k_1} v(t) - \underbrace{\frac{V(\rho_p-\rho)g}{m}}_{k_2} = 0$$

- Integrerande faktor: $e^{k_1 t}$

$$\frac{d}{dt}(v e^{k_1 t}) = k_2 e^{k_1 t} \Rightarrow v e^{k_1 t} = \frac{k_2}{k_1}e^{k_1 t} + C_1 \Rightarrow v = \frac{k_2}{k_1} + C_1 e^{-k_1 t}$$

Randvillkor: $v(t=0) = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{k_2}{k_1}$

$$\Rightarrow v(t) = \frac{k_2}{k_1}(1 - e^{-k_1 t})$$

- $$S(t) = \int_0^t v(t)\,dt = \frac{k_2}{k_1}\left(t + \frac{e^{-k_1 t}}{k_1}\right) + C_2$$

Randvillkor: $S(0) = 0 \Rightarrow C_2 = -\frac{k_2}{k_1^2}$

$$\Rightarrow S(t) = \frac{k_2}{k_1^2}(e^{-k_1 t} - 1 + k_1 t)$$

- $S = 500\ m \Rightarrow t_{max} = \underline{\underline{14,3\ s}}$

<u>Svar:</u> $\begin{cases} \text{Underskattning: } & t_{min} = 11,9\ s \\ \text{Överskattning: } & t_{max} = 14,3\ s \end{cases}$

5. Bestäm konfidensintervall och korrelationskoefficient!

- Konfidensintervall för A och B:

$$\theta_i = \theta_i^* \pm s\sqrt{(J^T J)^{-1}_{i}}\; t(N-P, \alpha/2)$$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mu(T_1)}{\partial A} & \frac{\partial \mu(T_2)}{\partial B} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \mu(T_2)}{\partial A} & \frac{\partial \mu(T_2)}{\partial B} \end{bmatrix} \qquad \frac{\partial \mu_i}{\partial A} = \frac{1}{\frac{1}{C - T/T_c} - B} = \mu/A$$

$$\frac{\partial \mu_i}{\partial B} = \frac{A}{\left(\frac{1}{C - T/T_c} - B\right)^2} = \mu^2/A$$

$$J^T = \begin{bmatrix} 1{,}159 & 1{,}38 & 1{,}73 & 2{,}14 & 2{,}65 & 3{,}33 & 4{,}20 \\ 156{,}04 & 221{,}05 & 345{,}9 & 533{,}6 & 812{,}85 & 1290{,}7 & 2050{,}4 \end{bmatrix}$$

Miniräknare $\Rightarrow$ $(J^T J)^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}266 & -6{,}6\cdot10^{-4} \\ -6{,}6\cdot10^{-4} & 1{,}79\cdot10^{-6} \end{bmatrix}$

$$s = \sqrt{SS_{reg}/N-P} = \sqrt{275/5} = \sqrt{51{,}5}$$

$$t(N-P, \alpha/2) = t(5, 0{,}025) = 2{,}571$$

$$A = 116{,}1 \pm \sqrt{51{,}5}\cdot\sqrt{0{,}266}\cdot 2{,}571 = 116{,}1 \pm 9{,}515$$

$$B = 0{,}982 \pm \sqrt{51{,}5}\cdot\sqrt{1{,}79\cdot10^{-6}}\cdot 2{,}571 = 0{,}982 \pm 0{,}0247$$

- Korrelationskoefficienten

$$C_{AB} = \frac{(J^T J)^{-1}_{12}}{\sqrt{(J^T J)^{-1}_{11}\cdot(J^T J)^{-1}_{22}}} = \frac{(-6{,}6\cdot10^{-4})}{\sqrt{0{,}266\cdot1{,}79\cdot10^{-6}}} = -0{,}96$$

Starkt negativ korrelationskoefficient på grund av modellen.

$$\mu = \frac{A}{\frac{1}{C - T/T_c} - B} = \frac{A(C - T/T_c)}{1 - B(C - T/T_c)}$$

B stor $\Rightarrow$ Nämnaren liten $\Rightarrow$ Täljaren liten $\Rightarrow$ A liten

6.

$$\mu(T) = \frac{A}{\frac{1}{C - T/T_c} - B}$$, där $T_c = 374{,}25$ K

$A = 121{,}2$

$B = 1{,}048$

T, μ_{obs} givna

Beräkna $\hat{\mu}_i$ samt $e = \mu_{obs} - \hat{\mu}$

- Residualanalys:

Plotta e mot:

1. Gruppindex - "försöksnummer"
2. T (oberoende variabel)
3. μ_{ber}

Säger inget, det är så stor skillnad mellan grupperna.

Slutsats: Man kan inte dra några slutsatser, p.g.a dominerande gruppeffekt.