TENTAMEN I MATEMATISK MODELLERING

Lördagen den 26 februari 1994

Sammanställt av David Frisk, Kf3
Januari 2013

Betygsgränser

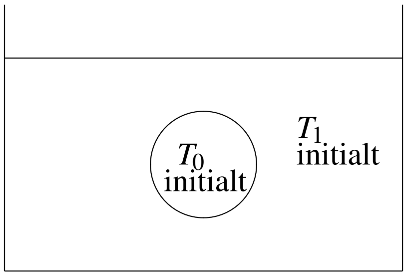
Poäng:	0-9.5	10-14.5	15-19.5	20-25
Betyg:	U	3	4	5

Tillåtna hjälpmedel

Skrivdon och valfri räknedosa
TEFYMA tabellen
Physics Handbook
Standard Mathematical Tables
BETA Mathematics Handbook
Handbook och Chemistry and Physics

1. (3p)
Formulera en populationsbalans för det endimensionella fallet med en cellkultur strömmande i en tub. (G=nettogenerering).

2. (5p)
Formulera med skalbalans en instationär modell för avkylning av en sfär i en väl blandad (ändlig) tank (se figur). Ange randvillkor.



3. (4p)
Hydrering av acetylen (A) i gasfas sker i en porös Pd / $\alpha - Al_2O_3$ katalysator.

$$C_2H_2 + H_2 \rightarrow C_2H_4, \qquad r = \frac{kP_A P_{H_2}}{(1 + K_A P_A + \sqrt{K_{H_2} P_{H_2}})^2} \quad mol/m^3 kat \cdot s$$

Diffusion kopplad med reaktion i en sfärisk pellet beskrivs av

$$D_{eff}\left(\frac{\partial^2 C}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial C}{\partial \rho}\right) - r = 0$$

Där C är koncentrationen och ρ är radien.

Effektiv diffusivitet för A	$D_{eff} = 10^{-6} m^2/s$
Hastighetskonstant	$k = 10^4 mol/m^3 \cdot bar^2 \cdot s$
Jämviktskonstant	$K_A = 100 bar^{-1}$
Jämviktskonstant	$K_{H_2} = 5 bar^{-1}$
Pelletradie	$r_p = 10^{-3} m$
Partialtryck vid ytan	$P_{As} = 5 \cdot 10^{-3} bar$
Partialtryck vid ytan	$P_{H_2} = 0.2 bar$
Temperatur	T=323 K

Vätgasen är i så kraftigt överskott att dess halt kan anses konstant. Använd tillämpliga randvärden och lös differentialekvationen med enpunkts kollokation samt beräkna effektivitets-faktorn mha

$$\eta = \frac{3\int_0^{r_p} \rho^2 r(p_A, p_{H_2}) dp}{r_p^3 r(p_{As}, p_{H_2 s})}$$

Integralen löses lämpligen numeriskt. Motivera valet av funktion och kallokationspunkt.

4. (5p)
En teknolog har köpt en fin röd ballong som han binder fast vid bänken. Ballongen är fylld med vätgas. Hur lång tid tar det innan ballongen sjunker till golvet? Ballongen har ett initialt tryck av 1.1 atm och en diameter av 0.3 m.

Luftens temperatur	20^oC
Luftens tryck	$1atm$
Diffusion $H_2 - N_2$ (gas)	$8 \cdot 10^{-5} m^2/s$
Diffusion $H_2 - O_2$ (gas)	$8 \cdot 10^{-5} m^2/s$
Diffusion H_2 ballonggummi	$5 \cdot 10^{-11} m^2/s$
Diffusion N_2 ballonggummi	$1 \cdot 10^{-11} m^2/s$
Diffusion O_2 ballonggummi	$1 \cdot 10^{-11} m^2/s$
Löslighet av H_2 i ballonggummi	$5mol/m^3 \cdot bar$
Löslighet av N_2 i ballonggummi	$1mol/m^3 \cdot bar$
Löslighet av O_2 i ballonggummi	$1mol/m^3 \cdot bar$
Ballonggummits densitet	$1000kg/m^3$

Ballongmaterialet väger 2 g och den del av snöret som bärs av ballongen väger 1 g. Diffusionen i en sfär beskrivs av:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D\left(\frac{\partial^2 C}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial C}{\partial r}\right)$$

Antag att diffusionen in av luft kan försummas och formulera de ekvationer (med randvärden) som krävs. Gör lämpliga approximationer och lös problemet. Gör även en uppskattning av storleken på de approximationer som gjorts (främst inverkan från diffusion in av luft). Önskad noggrannhet är ± 20%.

5. (3p)
Vid en så kallat lack-of-fit analys jämförs kvoten K:

$$K = \frac{S_l/\nu_l}{S_r/\nu_r}$$

med F-fördelningens värde $F(\nu_l, \nu_r, \alpha)$.

a) Beskriv i ord eller formler vad beteckningarna i kvoten $K(S_l, S_r, \nu_l, \nu_r)$ representerar och hur de erhålles. Ange speciellt vad för data som krävs för att kunna göra en analys.

b) Vad innebär det om kvoten K är större än F-fördelningens värde?

6. (5p)
Den biokemiska syreförbrukningen (BOD) hos ett prov undersöktes med hjälp av mätningar vid ett flertal tidpunkter. Resultatet ges i nedanstående tabell.

Tid (Dygn)	BOD (mg/l)
1	0.47
2	0.74
3	1.17
4	1.42
5	1.60
7	1.84
9	2.19
11	2.17

Följande modell för syreförbrukningen finns föreslagen:

$$f(t,\theta) = \theta_1(1 - e^{\theta_2 t})$$

där f är syreförbrukningen i mg/l och t är tiden i dygn. Med hjälp av minsta-kvadratmetoden har parametrarna, baserat på ovanstående data, bestämts till θ_1=2.498 mg/l och θ_2=-0.20246 / dygn.

a) Beräkna ett approximativt, sammansatt 95% konfidensområde (konfidensellipsoid) för parametrarna θ_1 och θ_2.
b) Gör en approximativ skiss av konfidensområdets utseende och ange vad utseendet säger om korrelationen mellan parametrarna.

Ledning: Några av nedanstående summeringar kan eventuellt vara till nytta. Se även bilaga för tabeller och formler.

$$\sum_{i=1}^{8}(1 - e^{\theta_2 t_i})^2 = 3.1377$$

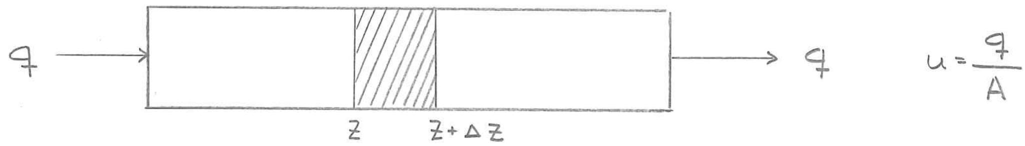
$$\sum_{i=1}^{8}(1 - e^{\theta_2 t_i})e^{\theta_2 t_i} = 1.5135$$

$$\sum_{i=1}^{8}(e^{\theta_2 t_i})^2 = 1.8353$$

$$\sum_{i=1}^{8}(t_i e^{\theta_2 t_i})^2 = 17.9906\ (dygn)^2$$

$$\sum_{i=1}^{8} t_i(1 - e^{\theta_2 t_i})e^{\theta_2 t_i} = 7.0462 \text{ dygn}$$

1. Söker antal celler med viss storlek, L.



Frekvensfunktion för celler/volymselement : $f(L,z)$ $[st/m \cdot m^3]$

Tillväxtshastighet (konstant): $v = \frac{dL}{dt}$ $[m/s]$

Nettogenerering : G $[st/m \cdot m^3 \cdot s]$

▸ Populationsbalans över tubelementet Δz för celler med storlek mellan L och $L + \Delta L$:

$$\overset{\text{Strömning in}}{q f(L,z)\big|_z \Delta L} - \overset{\text{Strömning ut}}{q f(L,z)\big|_{z+\Delta z} \Delta L} + \overset{\text{Tillväxt över } L}{f(L,z) v\big|_L \cdot A \Delta z} - \overset{\text{Tillväxt över } L+\Delta L}{f(L,z) v\big|_{L+\Delta L} \cdot A \Delta z} + \overset{\text{Netto-generering}}{G A \Delta z \Delta L} = 0$$

Dela med $\Delta L, \Delta z, A$:

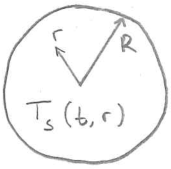
$$\Rightarrow \quad -\frac{q}{A} \frac{-f(L,z)|_z + f(L,z)|_{z+\Delta z}}{\Delta z} - v \frac{-f(L,z)|_L + f(L,z)|_{L+\Delta L}}{\Delta L} + G = 0$$

Låt $\Delta z \longrightarrow 0$, $\Delta L \longrightarrow 0$, får balansen:

$$\Rightarrow \quad \frac{q}{A} \frac{\partial f(L,z)}{\partial z} + v \frac{\partial f(L,z)}{\partial L} = G$$

Svar: $\dfrac{q}{A} \dfrac{\partial f(L,z)}{\partial z} + v \dfrac{\partial f(L,z)}{\partial L} = G$

2.



$T_\ell(t)$

$T_\ell(t=0) = T_1$

$T_s(t=0, r) = T_0$

▸ Avkylning av sfären: • T_s minskar med t och r (varmast i mitten).

• T_ℓ ökar med t, samma T_ℓ överallt (omblandat).

• $T_\ell(t=\infty) = T_s(t=\infty, r)$ (samma T till slut).

▸ Värmebalans över ett sfäriskt skal, $A = 4\pi r^2$

Energin leds utåt, från sfärens centrum. Konstant flöde q.

$$\underbrace{4\pi r^2 q\big|_r}_{\text{In}} - \underbrace{4\pi r^2 q\big|_{r+\Delta r}}_{\text{Ut}} = \underbrace{\Delta V \rho_s c_{p,s} \frac{\partial T_s}{\partial t}}_{\text{Ack.}}$$

där $\Delta V = \{\text{skalets volym}\} = \frac{4\pi}{3}\left((r+\Delta r)^3 - r^3\right) \approx 4\pi r^2 \Delta r$ (försummar krökningen)

Dividera med $4\pi\Delta r$

$$\Rightarrow \frac{-\left(r^2 q\big|_{r+\Delta r} - r^2 q\big|_r\right)}{\Delta r} = r^2 \rho_s c_{p,s} \frac{\partial T_s}{\partial t}$$

Låt $\Delta r \to 0$

$$\Rightarrow -\frac{\partial}{\partial r}\left(q r^2\right) = r^2 \rho_s c_{p,s} \frac{\partial T_s}{\partial t}$$ Fouriers lag: $q = -k\, dT/dr$

$$\Rightarrow -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(-r^2 k\, dT_s/dr\right) = \rho_s c_{p,s}\frac{\partial T_s}{\partial t} = \frac{k}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial T_s}{\partial r}\right)$$

▸ 2:a ord. diffekv i r, 1:a ord diffekv i T $\Rightarrow$ 3 RV.

I: $T_s(t=0, r) = T_0$

II: $T_s(t, R) = T_\ell(t)$ (Kontinuitet)

III: $\frac{\partial}{\partial r} T_s\big|_{r=0} = 0$ (Symmetri)

▸ Värmebalans vid $r=R$:

$$4\pi R^2 q/R = \rho_\ell c_{p,\ell}\frac{\partial T_\ell}{\partial t} \Rightarrow \text{Fourier} \Rightarrow 4\pi R^2 k \frac{\partial T_s}{\partial r}\Big|_R = \rho_\ell c_{p,\ell} V_\ell \frac{\partial T_\ell}{\partial t} = h(T_s - T_\ell)4\pi R^2$$

Differentialekvationen kräver 1 randvillkor: $T_\ell(t=0) = T_1$

▸ T_∞ ges av total värmebalans:

$$\rho_s c_{p,s} V_s (T_0 - T_\infty) = \rho_\ell c_{p,\ell} V_\ell (T_\infty - T_1) \Rightarrow T_\infty = \frac{\rho_\ell c_{p,\ell} V_\ell T_1 + \rho_s c_{p,s} V_s T_0}{\rho_\ell c_{p,\ell} V_\ell + \rho_s c_{p,s} V_s}$$

3. ▸ $C_A = \frac{P_A}{RT}$ $[mol/m^3]$, P_A i bar $\Rightarrow R = 8,31447 \cdot 10^{-5}$ $bar \cdot m^3/mol \cdot K$

▸ Kombinera ekvationerna:

$$\frac{D_{eff}}{RT}\left(\frac{\partial^2 P_A}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial P_A}{\partial \rho}\right) - \frac{k P_A P_{H_2}}{\left(1 + K_A P_A + \sqrt{K_{H_2} P_{H_2}}\right)^2} = 0 \quad (1)$$

Sätt $P_A = P$

Randvillkor: $\left.\frac{\partial P}{\partial \rho}\right|_{\rho=0} = 0$ (Symmetri). $P(\rho = r_p) = P_{As}$ (Ytan)

▸ Enpunkts kollokation

Ansätt $P(\rho) = a + b\rho + c\rho^2 \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial \rho} = b + 2\rho c \Rightarrow \frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2} = 2c$

RV I: $\left.\frac{\partial P}{\partial \rho}\right|_{\rho=0} = 0 \Rightarrow b = 0$

RV II: $P(\rho = r_p) = P_{As} \Rightarrow a = P_{As} - c\, r_p^2$

$\Rightarrow P(\rho) = P_{As} - c r_p^2 + c\rho^2 = P_{As} + c(\rho^2 - r_p^2)$, Välj punkt ρ_1

▸ Sätt in i (1)

$$\Rightarrow \frac{D_{eff}}{RT}\underbrace{\left(2c + \frac{2}{\rho_1} \cdot 2\rho_1 c\right)}_{=6c} - \frac{k P_{H_2}(P_{As} + c(\rho_1^2 - r_p^2))}{\left(1 + K_A (P_{As} + c(\rho_1^2 - r_p^2)) \sqrt{K_{H_2} P_{H_2}}\right.} = 0$$

▸ Val av ρ_1: Händer mest vid ytan, större volym där

$\Rightarrow$ välj $\rho_1 = 0,75\, r_p$

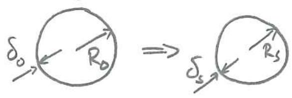
$\Rightarrow c = \ldots = 4,8964 \cdot 10^3$

▸ $$\eta = \frac{3\int_0^{r_p} \rho^2 r(P_A, P_{H_2})\, d\rho}{r_p^3\, r(P_{As}, P_{H_2 s})}, \quad r_p = 10^{-3}, \quad r = \frac{k P_A P_{H_2}}{1 + K_A P_A + \sqrt{K_{H_2} P_{H_2}}} = \frac{10}{6,24} = 1,6$$

$$\Rightarrow \eta = 3\frac{\int_0^{r_p} 1,6\rho^2 d\rho}{r_p^3 \cdot 1,6} = 3 \cdot \frac{[1,6\,\rho^3/3]_0^{r_p}}{r_p^3 \cdot 1,6} = 1$$

Blir fel, ska få $\eta = 0,688$

4. Transport av H_2 genom ballongmaterialet, vars tjocklek, δ, varierar, ska beskrivas.



$R_0 > R_s$
$\delta_0 < \delta_s$

▸ Beräkning av ballongvolym

Initialt: $d_0 = 0{,}3$ m, $V_0 = \frac{\pi d^3}{6} = 0{,}014\ m^3$

När den sjunker: Tyngdkraft = Lyftkraft

$$\Rightarrow (V_s \rho_{H_2} + m_b + m_s) g = V_s \cdot \rho_{luft} \cdot g$$

V_s = Volym då ballongen sjunker
m_b = Ballongens massa
m_s = Snörets massa

$$\Rightarrow V_s = \frac{m_b + m_s}{\rho_{luft} - \rho_{H_2}} \quad , \rho_{luft} = \frac{m_{luft}}{V_{luft}} = \frac{n_{luft}}{V_{luft}} \cdot M_{luft} = \frac{P_{luft} \cdot M_{luft}}{RT} = 0{,}091\ kg/m^3$$

$$\Rightarrow V_s = \frac{(2+1)\cdot 10^{-3}}{1{,}199 - 0{,}091} = 2{,}708 \cdot 10^{-3}\ m^3 \quad , \quad d_s = \left(\frac{6V_s}{\pi}\right)^{1/3} = 0{,}173\ m$$

▸ Ballongmaterialets tjocklek

Volym av materialet: $V_g = m_b/\rho_b = 2 \cdot 10^{-3}\ m^3$ (konstant)

Initialt: $\delta_0 = \frac{V_g}{A_0} = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{\pi d_0^2} = 7{,}067 \cdot 10^{-6}$ m

När den sjunker: $\delta_s = \frac{V_g}{A_s} = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{\pi d_s^2} = 2{,}13 \cdot 10^{-5}$ m

▸ Tidskonstanten för diffusion

Allmänt: $\tau_D = \frac{\text{kapacitet}}{\text{hastighet}} = \frac{V \cdot c}{A \cdot D \cdot \frac{c}{L}} = \frac{L^2}{D}$, L = Karakteristisk längd.
D = Diffusionskoefficient.

Inne i ballongen:

$$\tau_{Dt} = \frac{d_p^2}{D_{H_2-luft} \cdot 4} = 281\,s$$ (Försummar konc. gradient inne i ballongen)

I ballongmaterialet:

$$\tau_{Dg} = \frac{\delta_s^2}{D_{H_2-ballong}} = 9{,}07\,s$$ (Ackumulation försummas.

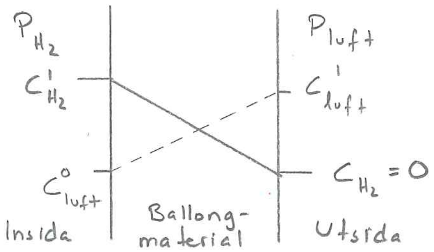
4. forts.

▸ Transport av H_2

Utanför ballongen: Ballongen befinner sig i ett stort rum, antar därför att $C_{H_2} = 0$ på den yttre ytan.

Vätekoncentration i ballongens innersida = vätgasens löslighet i materialet.

$$C_{H_2}(r=R) = C'_{H_2} = K_H \, P_{H_2} = 6{,}12 \text{ mol}/m^3$$



$$C'_{H_2} = K_{H_2} \, P_{H_2} \; , \quad C'_{luft} = K_{luft} \cdot P_{luft}$$

Försumma den sfäriska formen, ty tunt material!

$$\frac{d^2C}{dr^2} = 0 \quad (\text{Låt } r \to \infty \text{ i diffekv})$$

$$\Rightarrow \frac{dC}{dr} = C_1 \quad \Rightarrow C(r) = C_1 r + C_2 \quad . \quad RV: \; C = C'_{H_2}\left(1 - \frac{r-R}{\delta}\right)$$

Transport av H_2 i ballongmaterialet:

$$N_{H_2} = -D_{H_2}\frac{dC}{dr} = D_{H_2}\frac{C'_{H_2}}{\delta} \quad \text{mol}/m^3$$

▸ Balans över H_2 i ballongen ger tiden t_s då ballongen sjunker

Volymändring = Transporterat H_2 in i materialet

$$-C^b_{H_2} \cdot \frac{dV_b}{dt} = N_{H_2} \cdot A = D_{H_2} \cdot \frac{A}{\delta} \, C'_{H_2} \quad , \quad \frac{A}{\delta} = \frac{A^2}{V_g} = \frac{\pi^2 d_b^{\,4}}{V_g}$$

$$\Rightarrow \frac{dV_b}{dt} = \frac{\pi d_b^{\,2}}{2} \cdot \frac{d}{dt}(d_b) = D_{H_2} \cdot \frac{\pi^2 d_b^{\,4}}{V_g} \cdot K_{H_2} \cdot P_{H_2}$$

$$\Rightarrow dt = \frac{V_g}{2RT\pi K_{H_2} D_{H_2}} \left[\frac{1}{d_s} - \frac{1}{d_0}\right] \Rightarrow \quad t_s = 12{,}79 \cdot 10^4 \text{ s} = \underline{\underline{35{,}5 \text{ h}}}$$

▸ Kan mängden luft som diffunderar in försummas?

$$N_{luft} = D_{luft} \cdot \frac{C'_{luft} - C^b_{luft}}{\delta}$$

Eftersom diff. av luft och lösligheten av luft är 5 ggr mindre än för H_2 blir transporten av luft 25 ggr mindre.

- $n_{H_2, initialt} = V_0 P_{H_2}/RT = 0{,}640$ mol
- $n_{H_2, slutligen} = V_s P_{H_2}/RT = 0{,}125$ mol

$$\Delta n_{H_2} = 0{,}516 \text{ mol} \Rightarrow \Delta n_{luft} = \frac{0{,}516}{25} = 0{,}029 \text{ mol}$$

0,029 mol luft $\Leftrightarrow$ 0,6 g luft har diffunderat in – ej försumbart.

$m_{tot} = 3{,}6 \cdot 10^{-3}$ kg $\Rightarrow t_s = 30{,}5$ h

<u>Svar</u>: $t_s = 30{,}5$ h

5 Teoriuppgift

a) Antag m olika värden på x och att det vid x_i görs n_j observationer. Totalt antal försök blir: $N = \sum_{j=1}^{m} n_j$

- Lack-of-fit analys används för att undersöka hur bra modellen är.
- SS_E = Residualkvadratsumman som erhålls genom att addera SS_L = Lack-of-fit -%. och SS_{pe} = pure error, %.

$$SS_E = SS_L + SS_{pe}$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n_j} (y_{ji} - \hat{y}_j)^2 = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n_j} (y_{ji} - \bar{y}_j)^2 + \sum_{j=1}^{m} n_j (\hat{y}_j - \bar{y}_j)^2$$

SS_{pe} - motsvarar det "naturliga" modellfelet. # frihetsgrader: $\nu_E = N - m$

SS_L - motsvarar felet p.g.a. dålig modellpassning, # frihetsgrader: $\nu_L = m - p$

SS_E - residualen. # frihetsgrader: $\nu = N - p$

- För att undersöka om modellfelet är naturligt eller beror på en dålig modellanpassning jämförs kvoten K med F-fördelningen
- För att kunna göra testet behövs upprepade försök i testpunkter.

b) Om $K > F(\nu_L, \nu_E, \alpha)$ så är felet större än det "naturliga" felet (slumpen)

$\Rightarrow$ Modellen är ej korrekt.

6. Modell för syreförbrukningen: $f(t,\theta) = \theta_1 (1 - e^{\theta_2 t})$

a)

▶ Konfidensområde:

$$[\theta_1 - \theta_1^*, \ \theta_2 - \theta_2^*] \cdot J^{*T} J^* \begin{bmatrix} \theta_1 - \theta_1^* \\ \theta_2 - \theta_2^* \end{bmatrix} \le P S^2 f(P, N-P, \alpha) \qquad (1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta_1} = 1 - e^{\theta_2 t} = d_1, \quad \frac{\partial f}{\partial \theta_2} = -\theta_1 t e^{\theta_2 t} = d_2$$

$$J^* = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{21} \\ \vdots & \\ d_{18} & d_{28} \end{bmatrix}_{\theta_1^*, \theta_2^*}, \quad J^{*T} J^* = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{8} d_{1i}^2 & \sum_{i=1}^{8} d_{1i} \cdot d_{2i} \\ \sum_{i=1}^{8} d_{1i} \cdot d_{2i} & \sum_{i=1}^{8} d_{2i}^2 \end{bmatrix}$$

$$\sum_{i=1}^{8} d_{1i}^2 = \sum_{i=1}^{8} (1 - e^{\theta_2 t})^2 = 3{,}1377$$

$$\sum_{i=1}^{8} d_{1i} \cdot d_{2i} = -\theta_1 \sum_{i=1}^{8} t_i (1 - e^{\theta_2 t_i}) e^{\theta_2 t_i} = -2{,}498 \cdot 7{,}0462 = -17{,}601$$

$$\sum_{i=1}^{8} d_{2i}^2 = \theta_1^2 \sum_{i=1}^{8} (t_i e^{\theta_2 t_i})^2 = 2{,}489^2 \cdot 17{,}9906 = 112{,}25$$

$$\Rightarrow J^{*T} J^* = \begin{bmatrix} 3{,}1377 & -17{,}601 \\ -17{,}601 & 112{,}25 \end{bmatrix}$$

$$S^2 = \frac{\sum res_o^2}{N-P} = \frac{2{,}6244 \cdot 10^{-2}}{6} = 4{,}3739 \cdot 10^{-3}$$

$$f(P, N-P, \alpha) = f(2, 6, 0.05) = 5{,}14$$

▶ Har nu allt som behövs för att bestämma värden på termerna i (1)

$$P \cdot S^2 \cdot f(P, N-P, \alpha) = 2 \cdot 4{,}3739 \cdot 10^{-3} \cdot 5{,}14 = 0{,}0496$$

$$\Rightarrow [\theta_1 - \theta_1^*, \ \theta_2 - \theta_2^*] \cdot \begin{bmatrix} 3{,}1377 & -17{,}601 \\ -17{,}601 & 112{,}25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 - \theta_1^* \\ \theta_2 - \theta_2^* \end{bmatrix} \le 0{,}0496$$

$$\Rightarrow 3{,}1377 (\theta_1 - \theta_1^*)^2 - 35{,}20 (\theta_1 - \theta_1^*)(\theta_2 - \theta_2^*) + 112{,}25 (\theta_2 - \theta_2^*)^2 \le 0{,}0496$$

b) $C_{12} = \dfrac{(J^{*T} J^*)^{-1}_{12}}{\sqrt{(J^{*T} J^*)^{-1}_{11} (J^{*T} J^*)^{-1}_{22}}} = 0{,}9377 \Rightarrow$ Positiv relation, utdragen ellipsoid