

TENTAMEN I MATEMATISK MODELLERING

Tisdagen den 13 januari 2004

*Sammanställt av David Frisk, Kf3
Januari 2013*

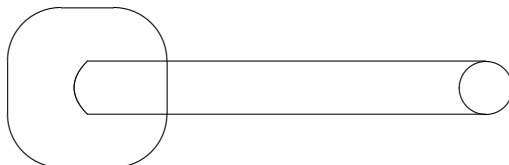
Betygsgränser				
Poäng:	0-14	15-19	20-24	25-
Betyg:	U	3	4	5

Tillåtna hjälpmedel

Skrivdon och valfri räknedosa
TEFYMA tabellen
Physics Handbook
Standard Mathematical Tables
BETA Mathematics Handbook
Handbook och Chemistry and Physics

1. (4p)

För att öka kylningen från en varm maskindel fastsätts flänsar i form av cylindriska metallstavar (se figur). Ställ, med hjälp av skalbalans, upp en stationär modell för värmetransporten i staven. Väggtemperaturen är T_0 och omgivningens temperatur är T_∞ . Radiella variationer i staven kan försummas och konvektiva värmeöverföringskoefficienten, h , är given.

**2. (4p)**

I en kokbok anges ett "skonsamt" sätt att koka fisk (en fisk uppfattas som färdigkok när temperaturen är ca 60°C). En kastrull som fylls med vatten kokas upp. Kokkärlet tas sedan av från spisen och ställs på ett isolerande underlag. Därefter läggs fiskbiten i och locket läggs på.

Ställ upp en matematisk modell (med randvillkor) för "kokförloppet" med följande antaganden.

- Fiskbiten antas sfärisk och är från början rumstempererad
- Vattnet i kastrullen är väl omblandat
- Eventuella ytterligare förenklingar ska motiveras

3. (5p)

Man önskar styra temperaturen i en kontinuerlig tankreaktor genom att variera kylvattnets temperatur.

Materialbalansen över reaktorn kan skrivas

$$V_r \frac{dC}{dt} = q(C^{in} - C) - ak_1 C V_r$$

Värmebalansen kan skrivas

$$\rho C_p V_r \frac{dT}{dt} = q \rho C_p (T^{in} - T) + ak_1 C (-\Delta H) V_r - UA(T - T_C)$$

Katalysatorns aktivitet a kan beskrivas

$$\frac{da}{dt} = -k_2 a$$

Förenkla dessa ekvationer till en linjär ordinär differentialekvation som beskriver reaktortemperaturens variation i tiden.

$$\begin{aligned} V_r &= 10m^3 & q &= 0.01m^3/s & \rho &= 1000kg/m^3 \\ C_p &= 4100J/kg & C^{in} &= 1000mol/m^3 & T^{in} &= 300K \\ A_1 &= 10^{13}s^{-1} & Ea_1 &= 80kJ/mol & \Delta H &= -200kJ/mol \\ A_2 &= 10^{-3}s^{-1} & Ea_2 &= 20kJ/mol & UA &= 20000J/K \cdot s \\ k_1 &= A_1 \cdot e^{-\frac{Ea_1}{RT}} \end{aligned}$$

4. (5p)

Laminär strömning i en vertikal, kvadratisk kanal kan skrivas

$$\mu \left(\frac{d^2 \mu}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} \right) + \rho g - \frac{dP}{dz} = 0$$

Beräkna volymströmningen (m^3/s) genom en kanal med kantlängden 1 cm och tryckfallet 20000 N/m^3 .

$$\mu = 10^{-3} \text{ kg/m} \cdot \text{s}, \quad \rho = 1000 \text{ kg/m}^3, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2.$$

Använd någon form av viktade residualer.

5. (5p)

Vid mätningar på en värmeväxlare bestående av ett yttre och ett inre rör uppmättes flöden samt in- och utgående temperaturer. Därur beräknades det totala värmegenomgångstalet U . Mediet som skall värmas går in i det inre röret, medan det värmande mediet går i motström i spalten mellan det inre och det yttre röret. Båda medierna när vätskeformiga. Två försöksserier genomfördes där flödet och medeltemperaturen i ytterspalten hölls konstant medan flödet (här givet som Reynolds tal) på insidan varierades. Följande resultat erhöles.

Re	U-serie 1 ($\text{W/m}^2\text{K}$)	U-serie 2 ($\text{W/m}^2\text{K}$)
13000	403	412
18000	505	518
23000	609	614
28000	723	697
33000	778	743

Sambandet mellan U , refererad till innerrörets inneryta, insidans värmegenomgångstal α_i och utsidans α_o ges som bekant av

$$U = \frac{1}{\frac{A_i}{A_o \alpha_o} + R_{tub} + \frac{1}{\alpha_i}}$$

Genom oberoende försök har $\frac{A_i}{A_o \alpha_o} + R_{tub}$ bestämts till $2.5 \cdot 10^{-4} \text{ Km}^2/\text{W}$. Vi skall nu undersöka två snarlika modeller för α_i :

Modell 1: $\alpha_i Re^{n_1}$

Modell 2: $\alpha_i = \alpha_2 (Re/Re_{Ref})^{n_2}$

där $Re_{ref} = 23000$.

Genom minimering av residualkvadratsumman bestämdes parametrarna till:

	Modell 1		Modell 2	
α (parameter 1)	0.2445		718.7	
n (parameter 2)	0.7952		0.7944	
SS	1916		1915	
$(J^T J)^{-1}$	$3.66 \cdot 10^{-5}$	$-1.50 \cdot 10^{-5}$	0.290	$4.46 \cdot 10^{-4}$
	$-1.5 \cdot 10^{-5}$	$6.18 \cdot 10^{-6}$	$4.46 \cdot 10^{-4}$	$6.18 \cdot 10^{-6}$

- a) Beräkna värdet på ett element i J-matrisen för modell 1. Ange vilket element du beräknat och ange även J-matrisens dimensioner för detta fall.
- b) Beräkna, för båda modellerna, 95% konfidensintervall för parametrarna. Beräkna även korrelationen mellan parametrarna.
- c) Jämför storleken på intervallen för motsvarande parametrarna i de båda modellerna. Notera att för parameter 1 så bör α_1 jämföras med $\alpha_2 / (Re_{ref})^{n_2}$ för att det skall bli rättvisande. Kommentera jämförelsen!

Ledning:

Korrelationsmatrisen C definieras som

$$C_{ij} = \{(X^T X)^{-1}\}_{ij} / [\{(X^T X)^{-1}\}_{ii} \{(X^T X)^{-1}\}_{jj}]^{0.5}$$

Se bilaga för tabeller och övriga formler.

6. (4p)

- a) Genomför en så kallad lack-of-fit-analys för modell 1 i uppgift 5 på signifikansnivån 95%.
- b) Illustrera i en graf, med "påhittade" data och en modell som kan beräknas med en rät linje, de sträckor som motsvarar de skillnader som ingår i residualkvadratsumman respektive "pure-error"-kvadratsumman.

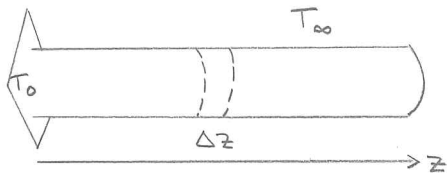
Ledning:

Pure error-kvadratsumman beräknas som $SS_e = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{n_j} (y_{ji} - \bar{y}_j)^2$, och dess antal frihetsgrader

är $v_e = \sum_{j=1}^m (n_j - 1)$.

Testvariabeln, som är F-fördelad (v_L, v_e, α) är $\frac{SS_L/v_L}{SS_e/v_e}$. Dessutom gäller att $SS_L = SS_r - SS_e$.

1.

► Värmebalans över Δz

$$\begin{array}{c} \text{Ledning in} \\ \swarrow \\ qA|_z \end{array} - \begin{array}{c} \text{Ledning ut} \\ \swarrow \\ qA|_{z+\Delta z} \end{array} - \begin{array}{c} \text{Värmeförlust} \\ \text{till omgivning} \\ \swarrow \\ Q \cdot A_m \end{array} = 0 \quad (\text{Steady state}) \quad (1)$$

$$\text{där Fouriers lag: } q = -k \frac{dT}{dz} \quad (2)$$

$$\text{Area för ledning: } A = \pi r^2 \quad (3)$$

$$\text{Transport med konv.: } Q = h(T - T_\infty) \quad (4)$$

$$\text{Mantelarea: } A_m = 2\pi r \Delta z \quad (5)$$

Sätt in (2), (3), (4), (5) i (1)

$$\Rightarrow -\pi r^2 (q|_{z+\Delta z} - q|_z) - h(T - T_\infty) \cdot 2\pi r \Delta z = 0$$

$$\Rightarrow 0 = -r \frac{q|_{z+\Delta z} - q|_z}{\Delta z} - 2h(T - T_\infty) \xrightarrow{\Delta z \rightarrow 0} -r \frac{dq}{dz} - 2h(T - T_\infty)$$

Använd Fouriers lag igen

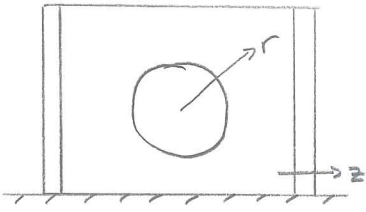
$$\Rightarrow rk \frac{d^2T}{dz^2} = 2h(T - T_\infty) \Rightarrow \frac{d^2T}{dz^2} - \frac{2h}{rk} T = -\frac{2h}{rk} T_\infty$$

$$\text{► Homogenlösning: } T_H(z) = C_1 \exp\left(\sqrt{\frac{2h}{rk}} z\right) + C_2 \exp\left(-\sqrt{\frac{2h}{rk}} z\right)$$

$$\Rightarrow \dots \Rightarrow T(z) = C_1 \exp\left(\sqrt{\frac{2h}{rk}} z\right) + C_2 \exp\left(-\sqrt{\frac{2h}{rk}} z\right) + T_\infty$$

$$\text{Randvillkor: } \begin{cases} \text{I: } T(z=0) = T_0 \\ \text{II: } T(z=\infty) = T_\infty \end{cases}$$

2.



- ▶ Inga mass förluster
- ▶ Inga strålnings förluster
- ▶ Inga förluster nedåt

▶ Skalbalans över fisken mellan r och $r + \Delta r$:

$$\overset{\text{In}}{\nearrow} qA|_r - \overset{\text{Ut}}{\nwarrow} qA|_{r+\Delta r} = \overset{\text{Ack}}{\nearrow} \rho V c_p \frac{dT}{dt}$$

$$\Rightarrow -4\pi (qr^2|_{r+\Delta r} - qr^2|_r) = \rho c_p 4\pi r^2 \Delta r \frac{dT}{dt} \quad \text{Dela med } \Delta r \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow -\frac{d}{dr} (qr^2) = \rho c_p r^2 \frac{dT}{dt} \quad \text{Fouriers lag: } q = -k \frac{dT}{dr}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT}{dr} \right) = \frac{\rho c_p r^2}{k} \frac{dT}{dt} \quad \text{RV: } \frac{dT}{dr} \Big|_{r=0} = 0 \quad (\text{Symmetri})$$

$$\text{BV: } T(t=0) = T_{0,\text{fisk}}$$

▶ Värmebalans för bulken:

$$\overset{\text{Ledning till fisken}}{\nwarrow} -A k \frac{dT}{dr} - \overset{\text{Ledning ut ur kastrullen}}{\nwarrow} (A_{\text{lock}} + A_{\text{sida}}) k_{\text{kastrull}} \frac{dT}{dz} = \overset{\text{Ackumulerat}}{\nearrow} \rho_{\text{H}_2\text{O}} c_{p,\text{H}_2\text{O}} V_{\text{kastrull}} \frac{dT}{dt}$$

Ledning genom metallen = Konv på utsidan

$$-k_{\text{kastrull}} \frac{dT}{dz} = h (T - T_{\text{omgivning}}) \quad \text{BV: } T(t=0) = 100^\circ\text{C}$$