TENTAMEN I MATEMATISK MODELLERING

Lördagen den 28 maj 2005

Sammanställt av David Frisk, Kf3
Januari 2013

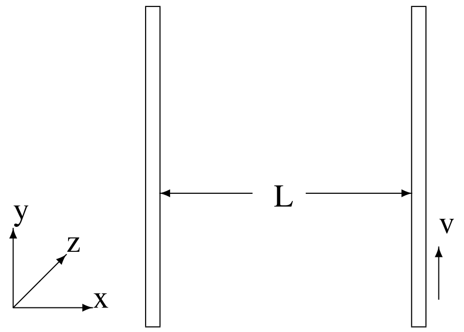
Betygsgränser

Poäng:	0-14	15-19	20-24	25-
Betyg:	U	3	4	5

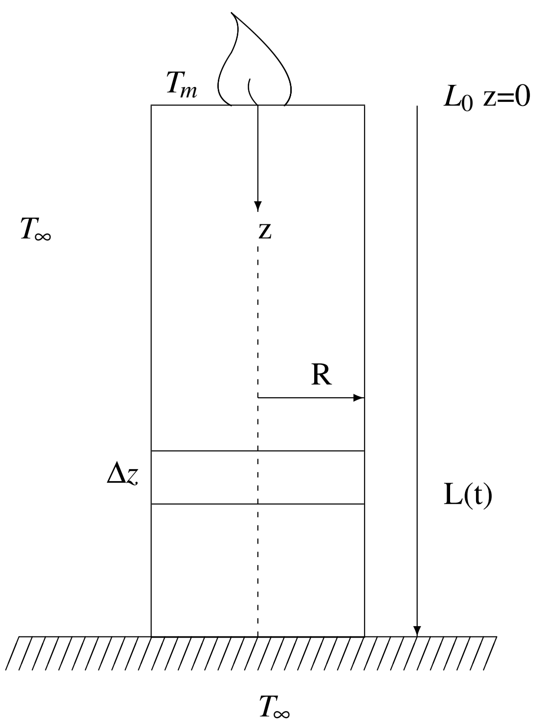
Tillåtna hjälpmedel

Skrivdon och valfri räknedosa
TEFYMA tabellen
Physics Handbook
Standard Mathematical Tables
BETA Mathematics Handbook
Handbook och Chemistry and Physics

1. (?p)
En vätska strömmar laminärt mellan två vertikala plattor under inflytande av en konstant nedåtriktad tryckgradient. Ena ytan står stilla och den andra rör sig uppåt med en konstant hastighet v (se figur). Ställ, genom att stryka termer i den generella transportekvationen, upp en stationär modell för hastighetsfördelningen $v_y(x)$. Motivera!



2. (?p)
Då ett ljus tänds kommer stearinet närmast lågan att nå smälttemperaturen T_m och ljuset börjar smälta. Antag att netto värmeflux (instrålning minus konvektion ut) till toppytan, q_0, är konstant och att det smälta skiktet är tunt. Värmeförluster från ljusets mantelyta kan inte försummas, men antag för enkelhetens skull att radiella temperaturvariationer är små. Basen av ljuset hålls vid konstant omgivningstemperatur T_∞. Ställ upp en modell för att beräkna ljuslängden som en funktion av tiden, L(t). Höjden är ursprungligen L_0.



3. (?p)
En lång, cylindrisk metallstång med diametern 2 cm värms elektriskt i vacuum. Värmeledningen kan beskrivas med följande differentialekvation

$$\lambda \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) = -k(1-\alpha T)$$

med randvärden $\lambda \frac{dT}{dr} = -\sigma T^4$ vid r=R och $\frac{dT}{dr} = 0$ vid r=0.

Beräkna med en viktad residualmetod, t.ex enpunkts kollokation, temperaturen vid centrum av cylindern då:

λ=10 W / m· K, k=$10^6 W/m^3$, $\alpha = 0.0005K^{-1}$ och $\sigma = 5.7 \cdot 10^8 W/m^2 \cdot K^4$

4. (?p)
Uppskatta om en regndroppe kan frysa till is genom förångning under tiden den faller från molnet till marken (50 s).

d=0.01m	C_p=4100 J/kg · K	ΔH_{vap}=2260 kJ/kg	h_m=333 kJ/kg
T_0=5^oC	T_{omg}=5^oC	K=0.2 (luftfuktighet)	$D_{H_2O-luft} = 10^{-5} m^2/s$
$\lambda_{luft} = 0.02W/m \cdot K$	$\lambda_{H_2O} = 0.56W/m \cdot K$	$p^o_{H_2O} = 875Pa$	$\rho_{H_2O} = 1000kg/m^3$

Diskutera vilka förenklingar som du gjort och om dessa innebär en ökning eller en minskning av möjligheten att droppen fryser.

Antag: $\frac{k_c d_d}{D_{luft}} = Sh = Nu = \frac{h d_d}{\lambda_{luft}} = 10$

5. (?p)

Värmeöverföringen vid fullfilmsöverföringen för ett rent ämne kan ofta beskrivas med sambandet: $Nu = C * Re^n$, där C < < n är modellens parametrar. En undersökning gav följande resultat:

Re	2000	4000	4000	10000	10000	13000	10000	10000
Uppmätt Nu	0.189	0.179	0.212	0.218	0.299	0.264	0.296	0.313

Utgående från mätdata har parametrarna C och n bestämts genom minimering av residualkvadratsumman SS. I minimipunkten erhölls följande värden:

C	0.023
n	0.264
SS	$3.135 \cdot 10^{-3}$
$(J^T J)$	$\begin{bmatrix} 1041 & 215.6 \\ 215.6 & 44.9 \end{bmatrix}$
$(J^T J)^{-1}$	$\begin{bmatrix} 0.217 & -1.04 \\ -1.04 & 5.04 \end{bmatrix}$

Uppgifter:

a) Bestäm individuella konfidensintervall för C och n.

b) En annan undersökning påstår att C=0.027 och n=0.25. Vid användning av den andra undersökningens parametervärden blir residualsumman $3.23 \cdot 10^{-3}$. Ligger den andra undersökningens parametervärden (på 95 %-nivå) inom ett sammansatt konfidensintervall för C och n? Gör undersökningen för båda typerna av sammansatta konfidensintervall! Redogör för den principiella skillnaden mellan dem.

6. (?p)

a) Undersök på lämpligt vis om det finns anledning att anta att modellen i uppgift 5 kan förbättras i något avseende.

b) Undersök om antagandet om konstant varians kan ifrågasättas. I detta fall finns två möjliga metoder. Genomför den ena och beskriv den andra!

c) Går det att med tillgängliga data göra en lack-of-fit analys av modellen eller krävs någon ytterligare information? Beskriv också hur analysen (i princip) går till och hur man tolkar resultatet.

1. Den generella rörelsemängds-transportekvationen i rektangulära koordinater är i y-led:

$$\rho\left(\overset{1}{\cancel{\frac{\partial v_y}{\partial t}}} + \overset{2}{\cancel{v_x}}\frac{\partial v_y}{x} + v_y \overset{3}{\cancel{\frac{\partial v_y}{\partial y}}} + \overset{4}{\cancel{v_z}}\frac{\partial v_z}{\partial y}\right) =$$

$$= -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \overset{5}{\cancel{\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}}} + \overset{6}{\cancel{\frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}}}\right) + \rho g_y$$

1. Stationärt
2. Ingen hastighet i x-led
3. Konstant hastighet i y-led
4. Ingen hastighet i z-led
5. Konstant hastighet i y-led
6. Konstant hastighet i z-led

$$\Rightarrow \boxed{0 = -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} - \rho g}$$

- Randvillkor:

RVI: $v_y(x=0) = 0$ (no-slip)

RVII: $v_y(x=L) = V$ (no-slip)

- Insättning av randvillkor:

$$\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial y} + \rho g\right) \approx \frac{1}{\mu}\left(\frac{\Delta P}{\Delta y} + \rho g\right)$$

Integration $\Rightarrow \dfrac{\partial v_y}{\partial x} = \dfrac{1}{\mu}\left(\dfrac{\Delta P}{\Delta y} + \rho g\right)x + C_1$

Integration $\Rightarrow v_y(x) = \dfrac{1}{\mu}\left(\dfrac{\Delta P}{\Delta y} + \rho g\right)\dfrac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$

1. forts

RVI $\Rightarrow$ $C_2 = 0$

RVII $\Rightarrow$ $\frac{1}{\mu}\left(\frac{\Delta P}{\Delta y} + \rho g\right)\frac{L^2}{2} + C_1 L = V$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{V - \frac{1}{\mu}\left(\frac{\Delta P}{\Delta y} + \rho g\right)\frac{L^2}{2}}{L}$$

$$\Rightarrow V_y(x) = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\Delta P}{\Delta y} + \rho g\right)\frac{x^2}{2} - \frac{1}{\mu}\left(\frac{\Delta P}{\Delta y} + \rho g\right)\frac{L}{2}\cdot x + \frac{V}{L}x =$$

$$\boxed{= \frac{1}{\mu}\left(\frac{\Delta P}{\Delta y} + \rho g\right)\frac{x^2 - Lx}{2} + \frac{V}{L}x}$$

2. Ställ upp en värmebalans över en cylindrisk kontrollvolym i det cylindriska ljuset:

$$q \cdot A_{tv}\big|_z - q A_{tv}\big|_{z+\Delta z} - h A_{mantel}(T - T_\infty) = \rho c_p \Delta V \frac{\partial T}{\partial t}$$

Ledning in Ledning ut Konvektion ut Ackumulation

$A_{tv} = \pi r^2$, $A_{mantel} = 2\pi r \Delta z$, $\Delta V = \pi r^2 \Delta z$

$$\Rightarrow \quad q\pi r^2\big|_z - q\pi r^2\big|_{z+\Delta z} - h \cdot 2\pi r \Delta z (T - T_\infty) = \rho c_p \pi r^2 \Delta z \frac{\partial T}{\partial t}$$

Dela med $\pi r^2 \Delta z$, låt $\Delta z \to 0$

$$\Rightarrow \quad -\frac{\partial}{\partial z}(q) - \frac{2h}{r}(T - T_\infty) = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

Fouriers lag: $q = -k \dfrac{\partial T}{\partial z}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - \frac{2h}{r}(T - T_\infty) = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}} \qquad (1)$$

Vi behöver 2 randvillkor och ett begynnelsevillkor:

RV I: $T(z=0) = T_m$

RV II: $T(z = L(t)) = T_\infty$

BV I: $T(t=0) = T_\infty$

För att studera $L(t)$ görs en Värmebalans över ytan:

$$q_0 A_{tv}\big|_{z=0} - q A_{tv}\big|_{z=0} - \frac{h_m \rho \Delta V}{\Delta t} = 0 \qquad (h_m \text{ - smältentalpi})$$

$A = \pi r^2$, $\Delta V = \pi r^2 \Delta L(t)$, $q = -k \dfrac{\partial T}{\partial z}$

$$\Rightarrow \quad q_0 \cancel{\pi r^2}\big|_{z=0} + k \frac{\partial T}{\partial z} \cancel{\pi r^2}\big|_{z=0} = h_m \rho \Delta L(t) \cdot \frac{1}{\Delta t} \cancel{\pi r^2} \qquad \text{Låt } \Delta t \to 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{q_0 + k \frac{\partial T}{\partial z}\bigg|_{z=0} = h_m \rho \frac{\partial L(t)}{\partial t}} \qquad (2)$$

Vi behöver ett begynnelsevillkor: BV II: $L(t=0) = L_0$

Genom att lösa (1) och (2) erhålls $L(t)$!

3 Ansätt följande polynom för att beskriva $T(r)$!

$$P(r) = a + br + cr^2$$

- Kan randvillkoren uppfyllas ?

$$\frac{\partial P}{\partial r} = b + 2cr \quad , \quad \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} = 2c$$

$$\text{RV II}: \left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=0} = 0 \Rightarrow b + 2c \cdot 0 = 0 \Rightarrow \underline{b = 0} \Rightarrow P(r) = a + cr^2$$

$$\text{RV I} \quad \lambda \left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=R} = -\sigma T^4 \Rightarrow \lambda \cdot 2cR = -\sigma P^4$$

$$\Rightarrow \lambda \cdot 2cR = -\sigma (a + cR^2)^4 = \qquad (1)$$

$$= -\sigma (a^2 + c^2R^4 + 2acR^2)(a^2 + c^2R^4 + 2acR^2) =$$

$$= -\sigma (a^4 + 4a^3cR^2 + 6a^2c^2R^4 + 6a^2c^2R^4 + 4ac^3R^6 + c^4R^8)$$

- Välj en kollokationspunkt, r_1, vid halva stångens volym

$$V_{tot} = \pi R^2 L \quad , \quad V_1 = V_{tot}/2 = \frac{\pi}{2} R^2 L = \pi r_1^2 L$$

$$\Rightarrow r_1 = R\sqrt{1/2}$$

- Det ansätta polynomet ska ha residualen 0 i kollokationspunkten.

$$Res(r_1) = \lambda \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial P}{\partial r}\right) + k(1 - \alpha \cdot P) = \frac{\lambda}{r}\left(\frac{\partial P}{\partial r} + r\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}\right) + k(1 - \alpha P)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial r} = 2cr = -\dfrac{\sigma T_y^4}{\lambda R} \cdot r \\ \dfrac{\partial P}{\partial r} = 2c = -\dfrac{\sigma T_y^4}{\lambda R} \end{cases}$$

där $T_y^4 = a^4 + 4a^3cR^2 + 6a^2c^2R^4 + 6a^2c^2R^4 + 4ac^3R^6 + c^4R^8$

3 forts.

- Insättning i uttrycket för residualen ger:

$$Res(r) = \frac{\lambda}{r}\left(-\frac{\sigma T_y^4}{\lambda R} r - r\frac{\sigma T_y^4}{\lambda R}\right) + k\left(1-\alpha\left(a - \frac{\sigma T_y^4}{2\lambda R} r^2\right)\right) =$$

$$= -2\frac{\sigma T_y^4}{R} + k\left(1-\alpha\left(a - \frac{\sigma T_y^4}{2\lambda R} r^2\right)\right)$$

Insättning av kollokationspunkten $r_1 = R\sqrt{1/2}$ ger

$$Res\left(R\sqrt{1/2}\right) = -2\frac{\sigma T_y^4}{R} + k\left(1-\alpha\left(a - \frac{\sigma T_y^4}{2\lambda R}\cdot\left(R\sqrt{1/2}\right)^2\right)\right) = 0 \qquad (2)$$

Genom att lösa (1) och (2) fås värden för konstanterna a och c. När dessa sätts in i $P(r)$ kan mitt-temperaturen $P(0)$ beräknas!

4. Då samtidig mass- och värmetransport sker antas

$$Sh = \frac{k_c d_d}{D_{luft}} = \frac{h d_d}{\lambda_{luft}} = Nu = 10 .$$

- Droppen fryser till is om temperaturen sjunker till 0°C och sedan kyls så att den fryser.
- Temperaturen sjunker pga att vatten avdunstar till luften som ej är mättad.
- Vatten diffunderar ut från droppen till luften.

- Beräkna energin som droppen behöver förlora för att frysa:

$$w_1 = c_p m \Delta T + m h_m = \rho V (c_p (T_0 - 0°C) + h_m) =$$

$$= 1000 \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot \left(\frac{0{,}01}{2}\right)^3 \left(4100 (5-0) + 333\,000\right) = 185 \text{ J}$$

- Beräkna energin som går åt till att förånga hela droppen:

$$w_2 = \Delta H_{vap} \cdot \rho V = 2260 \cdot 1000 \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot \left(\frac{0{,}01}{2}\right)^3 = 1180 \text{ J}$$

∴ Det är möjligt att frysa droppen med energin som går åt till förångning. Hur mycket av droppen förångas?

- Substansmängden avdunstat vattnet är:

$$n = N \cdot A \cdot t = k_c (c_s - c_\infty) \cdot \pi d^2 \cdot t$$

Om massförändringen försummas kan vi beräkna de konstanta värdena för k_c och d

4 forts.

Massöverföringskoefficienten k_c är:

$$k_c = \frac{Sh \cdot D_{luft}}{d} = \frac{10 \cdot 10^{-5}}{0{,}01} = 0{,}01 \ m/s$$

Koncentrationer vid ytan och i omgivningen:

$$C_s = \frac{P^*_{H_2O}}{RT} = \frac{875}{R \cdot 278} = 0{,}38 \ mol/m^3$$

(Temperaturvariationen är mycket liten, kan försummas)

$$C_\infty = K \cdot \frac{P^*_{H_2O}}{RT} = 0{,}076 \ mol/m^3$$

(Antas konstant pga stor volym)

Vi kan nu bestämma den avdunstade substansmängden:

$$n = k_c (C_s - C_\infty) \pi d^2 \cdot t =$$

$$mol = \frac{m}{s} \cdot \frac{mol}{m^3} \cdot m^2 \cdot s$$

$$= 0{,}01 (0{,}38 - 0{,}076) \cdot \pi \cdot 0{,}01^2 \cdot 50 = 4{,}76 \cdot 10^{-5} \ mol$$

Energin som lämnar droppen pga evaporation är:

$$W_3 = M n \Delta H_{vap} = 18.02 \cdot 10^{-3} \cdot 4{,}76 \cdot 10^{-5} \cdot 2260 \cdot 10^3 = \underline{1{,}94 \ J}$$

∴ Energin som går åt till förångningen är för liten för att droppen ska frysa! Vi har försummat massförändringen vilket överskattar den avdunstade mängden, denna är ändå så liten att det inte påverkar avdunstningsenergin nämnvärt.
Vi har försummat värmeöverföring från den varmare luften, hade denna inkluderats hade frysmöjligheten blivit ännu mindre.

5 $Nu = C \cdot Re^n$, $\hat{C} = 0,023$, $\hat{n} = 0,264$

a) Individuella konfidensintervall ges av:

$$b_p \pm se(b_p)\, t(N-P, \alpha/2) = b_p \pm s \sqrt{\left((J^T J)^{-1}\right)_{pp}}\; t(N-P, \alpha/2)$$

$$s = \sqrt{\frac{SSE}{N-P}} = \sqrt{\frac{3,135 \cdot 10^{-3}}{8-2}} = 0,0229$$

$$t(N-P, \alpha/2) = \{\text{Välj } \alpha = 5\%\} = 2,45$$

$$\hat{C}: \quad \hat{C} \pm s\sqrt{\left((J^T J)^{-1}\right)_{11}} \cdot t(N-P, \alpha/2) = \underline{0,023 \pm 0,026}$$

$$\hat{n}: \quad \hat{n} \pm s\sqrt{\left((J^T J)^{-1}\right)_{22}} \cdot t(N-P, \alpha/2) = \underline{0,264 \pm 0,126}$$

b) Det sammansatta konfidensintervallet ges av:

Exakt form: $$SS(\beta) \leq SS(b)\left(1 + \frac{P}{N-P} F(P, N-P, \alpha)\right) \qquad (1)$$

Approximativ form: $$(\beta - b)^T J^T J (\beta - b) \leq P s^2 F(P, N-P, \alpha) \qquad (2)$$

där $\beta = \begin{bmatrix} 0,027 \\ 0,25 \end{bmatrix}$ är de parametrar som ska undersökas

och $b = \begin{bmatrix} 0,023 \\ 0,264 \end{bmatrix}$ är de skattade parametrarna.

Exakt form

$$(1) \Rightarrow \quad 3,23 \cdot 10^{-3} \leq 3,135 \cdot 10^{-3}\left(1 + \frac{2}{8-2} F(2, 8-2, 0,05)\right)$$

$$\Rightarrow 3,23 \cdot 10^{-3} \leq 8,51 \cdot 10^{-3}$$ OK!

$\therefore$ Den andra undersökningens parametrar ligger inom ett sammansatt 95% konfidensintervall med exakt form (och approximativ konfidensgrad)!

5 forts.

Approximativ form

$$\beta - b = \begin{bmatrix} 0,027 - 0,023 \\ 0,25 - 0,264 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,004 \\ -0,014 \end{bmatrix}$$

$$(2) \Rightarrow \begin{bmatrix} 0,004 & -0,014 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1041 & 215,6 \\ 215,6 & 44,9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,004 \\ -0,014 \end{bmatrix} \leq 2 \cdot 0,0229^2 \cdot 5,14$$

$$\Rightarrow \quad 1,31 \cdot 10^{-3} \leq 5,37 \cdot 10^{-3}$$ OK!

$\therefore$ Den andra undersökningens parametrar ligger inom ett sammansatt 95% konfidensintervall med approximativ form.

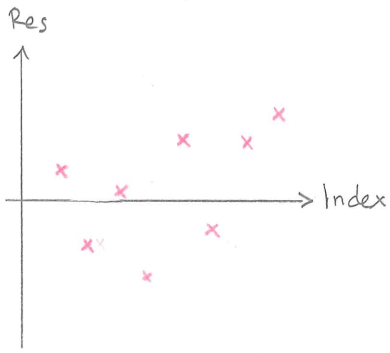
Principiell skillnad

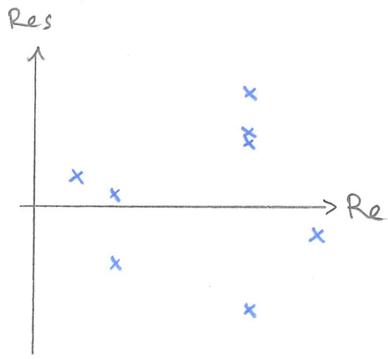
Modellen är ickelinjär med avseende på sina parametrar. Ekvation (1) gäller för ett icke linjärt fall varför den ger ett konfidensområde med exakt form. Då beräkningarna i (1) kräver beräkning av residualkvadratsumman för varje parameterutvärdering är det en beräkningstung process att bestämma konfidensområdet. Det går att använda (2), som gäller för linjära modeller, för att på ett mycket enklare sätt bestämma konfidensområdet, men då med en approximativ form pga modellens icke-linjäritet.

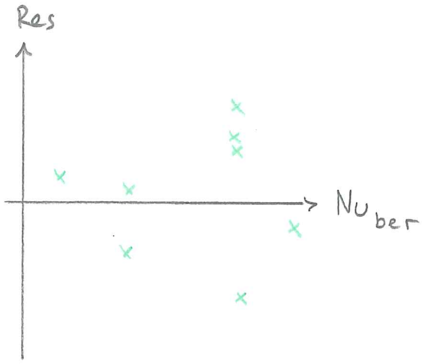
6

a) Vi kan undersöka modellen genom en residualanalys:

Index	Re	Nu_{obs}	Nu_{ber}	Res
1	2000	0.189	0,171	0,018
2	4000	0,179	0,205	-0,026
3	4000	0.212	0,205	0,007
4	10 000	0.218	0,262	-0,044
5	10 000	0,299	0,262	0,037
6	13 000	0,264	0,280	-0,016
7	10 000	0,296	0,262	0,034
8	10 000	0,313	0,262	0,051







∴ Inga tydliga trender visas i residualernas beteende.

b) För att undersöka variansen kan en residualanalys utföras (enligt ovan). Residualerna kan normeras eller studentiseras för att ge tydligare resultat.

Om flera mätningar gjorts i varje mätpunkt kan en spridningsjämförelse göras, där residualernas spridning jämförs vid olika mätpunkter

6 forts.

c) Lack-of-fit analys: En testvariabel

$$\frac{SS_\ell / \nu_\ell}{SS_p / \nu_p}$$ jämförs med $F(\nu_\ell, \nu_p, \alpha)$. Detta kräver upprepade försök i samma punkt vilket gjorts i den aktuella undersökningen.

$$SS_\ell = \sum_{j=1}^{m} n_j (\hat{y}_j - \bar{y}_j)^2 =$$

$$= 1(0{,}171 - 0{,}189)^2 + 2(0{,}205 - 0{,}196)^2 + 4(0{,}262 - 0{,}282)^2 +$$

$$+ 1(0{,}280 - 0{,}264)^2 = \underline{2{,}34 \cdot 10^{-3}}$$

$$SS_p = SS - SS_{lof} = (3{,}135 - 2{,}34) \cdot 10^{-3} = \underline{7{,}93 \cdot 10^{-4}}$$

$$\nu_\ell = m - p = 4 - 2 = 2$$

$$\nu_p = n - m = 8 - 4 = 4$$

$$\Rightarrow \frac{SS_\ell / \nu_\ell}{SS_p / \nu_p} = \frac{2{,}34 \cdot 10^{-3} / 2}{7{,}93 \cdot 10^{-4} / 4} = \underline{5{,}90}$$

$$F(\nu_\ell, \nu_p, \alpha) = F(2, 4, 0.05) = \underline{6{,}94}$$

Testvariabeln s värde är mindre än F-fördelningens värde.

$\Rightarrow$ Ingen lack-of-fit föreligger, modellen innehåller inga signifikanta fel.