

TENTAMEN I MATEMATISK MODELLERING INOM KEMITEKNIKEN

KAA051 (KAA050)

Onsdag 17 januari 2007 kl 08.30-13.30 i V

Anders Rasmuson är anträffbar för frågor på telefonnkn 2940 eller 27 36 06 och kommer att vara i tentamenslokalen någon gång mellan kl 10.00 och 11.00.

Granskning av tentamensrättningen kan ske tidigast den 6 februari 2007.

Betygsgränser

Poäng:	0-14	15-19	20-24	25-
Betyg:	U	3	4	5

Tillåtna hjälpmedel

Skrivdon och valfri räknedosa (nollställd)

TEFYMA-tabellen

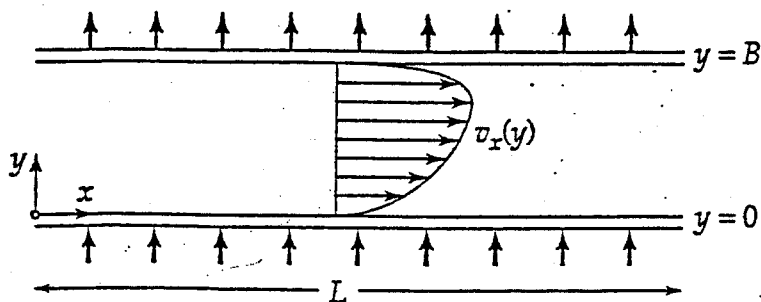
Physics Handbook

Standard Mathematical Tables

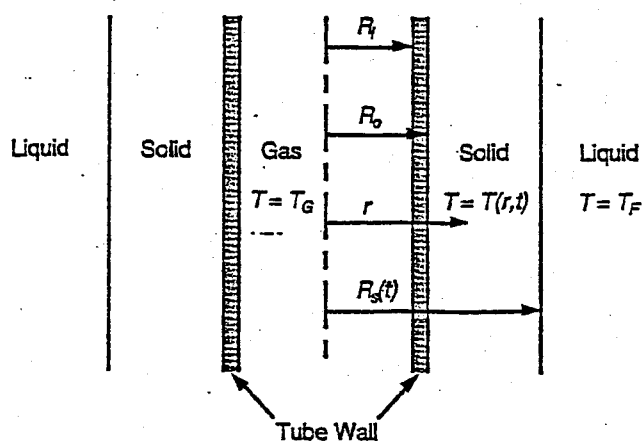
BETA Mathematics Handbook samt

Handbook of Chemistry and Physics

1. En vätska strömmar i positiv x-riktning genom en lång plan spalt med längd L , bredd W och höjd B , där $L \gg W \gg B$. Spalten har porösa väggar vid $y=0$ och $y=B$, så att ett konstant tvärflöde, $v_y = v_0$, kan upprätthållas. Ställ, genom att stryka termer i den generella transportekvationen (se bilaga), upp en stationär modell för hastighetsfördelningen $v_x(y)$! Motivera! (4p)



2. En ren vätska fryses på utsidan av ett rör enligt figur. Bulkvätskans temperatur T_F ligger på fryspunkten och insidan av röret kyls med strömmande gas med temperaturen T_G . Ställ upp en modell för tillväxten av det frysta skiktet. Antag att T_G är oberoende av axiell position. (6p)



Uppgift 3

(5 poäng)

Koncentrationen, C , som funktion av längden, z , i en ideal tubreaktor med axiell dispersion kan beskrivas enligt:

$$D_{ea} \frac{d^2 C}{dz^2} - v \frac{dC}{dz} - r = 0 \quad (1)$$

där C är koncentrationen (mol/m^3), z är längden (m), v är flödes hastigheten (m/s), D_{ea} är axiell dispersions koefficient (m^2/s), r reaktionshastigheten ($\text{mol}/(\text{s m}^3)$).

Reaktionshastighet ($\text{mol}/(\text{s m}^3)$)	$r = kC^2$
Inflödeskoncentration	$C_{\text{IN}} = 1000 \text{ mol}/\text{m}^3$
Axiell dispersionskoefficient	$D_{ea} = 0.01 \text{ m}^2/\text{s}$
Reaktor längd	$L = 3 \text{ m}$
Flödes hastighet	$v = 1.0 \text{ m}/\text{s}$
Hastighetskonstant	$k = 0.005 \text{ m}^3/(\text{mol s})$

a) Förenkla ekvation 1 och ta fram ett uttryck för C som funktion av z . ALLA antaganden och förenklingar skall TYDLIGT motiveras. Vad är koncentrationen vid $z=1\text{m}$ och $z=2\text{m}$. Undersök också efteråt om antagandena var acceptabla.

b) Antag att den axiella dispersionskoefficienten är: $D_{ea} = 0.03 \text{ m}^2/\text{s}$ och flödes hastigheten är $v = 0.01 \text{ m}/\text{s}$. Förenkla då ekvation 1, den behöver ej lösas och behöver ej ha en analytisk lösning. Alla antaganden och förenklingar skall TYDLIGT motiveras.

Uppgift 4

(5 poäng)

Använd valfri viktad residual, tex enpunkts kollokation för att lösa koncentrationen, C , som funktion av längden, z , i en ideal tubreaktor. Materialbalansen är:

$$D_{ea} \frac{d^2 C}{dz^2} - v \frac{dC}{dz} - r = 0 \quad (1)$$

där C är koncentrationen (mol/m^3), z är längden (m), v är flödes hastigheten (m/s), D_{ea} är axiell dispersions koefficient (m^2/s), r reaktionshastigheten ($\text{mol}/(\text{s m}^3)$).

Reaktionshastighet ($\text{mol}/(\text{s m}^3)$)	$r = kC^2$
Inflödeskoncentration	$C_{IN} = 1000 \text{ mol}/\text{m}^3$
Axiell dispersionskoefficient	$D_{ea} = 0.01 \text{ m}^2/\text{s}$
Reaktor längd	$L = 3 \text{ m}$
Flödes hastighet	$v = 1.0 \text{ m}/\text{s}$
Hastighetskonstant	$k = 0.005 \text{ m}^3/(\text{mol s})$

Motivera val av randvillkor och kollokationspunkt. Koncentrationsändringen i utloppet kan antas vara liten.

a) Tag fram ett uttryck för hur koncentrationen beror av längden. Vad är koncentrationen vid $z=1\text{m}$ och $z=2\text{m}$.

b) Använd residualanalys för att undersöka tillförlitligheten i din approximation. Kommentera resultatet.

c) Beskriv lösningsgången om minsta kvadratmetoden används istället. Alla ekvationer skall redovisas, men de behöver ej lösas.

Uppgift 5 (5 poäng)

Miriam Johansson undersöker i sitt doktorsarbete värmeöverföringen vid indunstning av svartlut i en fallfilmsutrustning. För överslagsberäkningar finns behov av en så enkel modell som möjligt. Hon förslår att i sådana sammanhang använda

$$h = a\Gamma^b \mu^c$$

Här är Γ massflödes hastigheten per meter vägg (kg/(m s)), μ svartlutens viskositet i Pa s och h värmeöverföringskoefficienten i W/(m² K).

Genom minimering av residualkvadratsumman $SS = \sum (h_{\text{modell}} - h_{\text{experiment}})^2$ för de data som återfinns i tabell i uppgift 6 bestämdes parametrarna a , b , c och kvadratsumma mm till

a (parameter 1)	239,1		
b (parameter 2)	0,378		
c (parameter 3)	-0,401		
SS	1,29·10 ⁵		
$\mathbf{J}^T \mathbf{J}$	683,8	-1,01·10 ⁵	-1,09·10 ⁶
	-1,01·10 ⁵	1,87·10 ⁷	1,64·10 ⁸
	-1,09·10 ⁶	1,64·10 ⁸	1,79·10 ⁹
$(\mathbf{J}^T \mathbf{J})^{-1}$	0,0632	8,24·10 ⁻⁶	3,78·10 ⁻⁵
	8,24·10 ⁻⁶	2,74·10 ⁻⁷	-2,01·10 ⁻⁸
	3,78·10 ⁻⁵	-2,01·10 ⁻⁸	2,54·10 ⁻⁸

- En undersökning av fallfilmsförångning för några andra ämnen har kommit fram till värdet 0,40 för b och -0,42 för c . Går det att säga att dessa värden skiljer sig signifikant från de som anges ovan? Använd 95%-iga individuella konfidensintervall vid undersökningen.
- Undersök korrelationen mellan parametrarna b och c . Vad innebär det resulterande värdet? Illustrera gärna grafiskt.
- Hur definieras matrisen \mathbf{J} ? Beräkna $J_{3,2}$.

Ledning:

Korrelationskoefficientmatrisen \mathbf{C} beräknas enligt

$$C_{i,j} = \frac{\mathbf{D}_{ij}}{\sqrt{\mathbf{D}_{i,i} \cdot \mathbf{D}_{j,j}}}, \text{ där } \mathbf{D} = (\mathbf{J}^T \mathbf{J})^{-1}$$

Se bilaga för övriga tabeller och formler.

Uppgift 6 (5 poäng)

Ibland kan det vara motiverat att på något sätt transformera sin modell. Vanligt förekommande är att logaritmera. Låt $y = \ln(h)$, där h är modellen i uppgift 5. Även för denna modell har parametrar bestämts, nu genom minimering av $SS = \sum (y_{\text{modell}} - \ln(h_{\text{experiment}}))^2 \cdot I$. I nedanstående tabell finns de värden man får i de uppmätta punkterna både för modellen i uppgift 5 (med sina optimala värden på parametrarna) och för denna modell (med sina parametervärden).

Γ	μ	T/K	h uppmätt	h modell	y modell
0,69	0,00078	117	3811	3672	8,199
0,52	0,00078	117	3076	3293	8,107
0,35	0,00078	117	2850	2827	7,979
0,55	0,0058	51	1717	1503	7,307
0,27	0,0059	52	1176	1148	7,079
1,054	0,0210	51	1066	1148	6,990
0,86	0,0213	51	974	1060	6,923
0,58	0,0240	51	832	866	6,744

- Undersök om "modellen y" är linjär.
- Undersök på lämpligt sätt vilken av de båda modellformuleringarna (den i uppgift 5 eller den här) som ur statistisk synpunkt är den bästa, dvs. vilken som på bästa sätt uppfyller grundförutsättningarna för att använda minsta kvadratmetoden för att bestämma parametrarna i modellen. *
- Undersök på lämpligt sätt om det finns anledning att anta att modellen i uppgift 5, med de genom kvadratsummeminimering bestämda parametrarna, kan förbättras på något sätt (annat än det som undersöktes i deluppgift b).

* Det räcker att göra undersökningen mot en variabel.

Appendix A

Table A1: Microscopic transport equations in rectangular coordinates

Mass Balance for Component A in Dilute Binary System

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} + v_x \frac{\partial c_A}{\partial x} + v_y \frac{\partial c_A}{\partial y} + v_z \frac{\partial c_A}{\partial z} = \mathcal{D}_{AB} \left(\frac{\partial^2 c_A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c_A}{\partial z^2} \right) + R_A$$

Accumulation
Transport through surface by bulk flow
Transport through surface by mass diffusion
Generation

Mass Balance for i^{th} Specie (Multicomponent)

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + v_x \frac{\partial \rho_i}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho_i}{\partial y} + v_z \frac{\partial \rho_i}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{c^2}{\rho} \sum_{j=1}^n M_i M_j \mathcal{D}_{ij} \left[x_j \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \left(\frac{\partial \ln a_j}{\partial x_k} \right) \frac{\partial x_k}{\partial x} \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{c^2}{\rho} \sum_{j=1}^n M_i M_j \mathcal{D}_{ij} \left[x_j \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \left(\frac{\partial \ln a_j}{\partial x_k} \right) \frac{\partial x_k}{\partial y} \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{c^2}{\rho} \sum_{j=1}^n M_i M_j \mathcal{D}_{ij} \left[x_j \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \left(\frac{\partial \ln a_j}{\partial x_k} \right) \frac{\partial x_k}{\partial z} \right] \right\} + r_i$$

Accumulation
Transport through surface by bulk flow
Transport through surface by mass diffusion
Generation

Mass Balance (Total)

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

Transport by bulk flow

Momentum Balance

x component

$$\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) + \rho g_x$$

Accumulation
Transport through surface by bulk flow
Transport through surface by viscous diffusion
Generation

y component

$$\rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) + \rho g_y$$

Accumulation
Transport through surface by bulk flow
Transport through surface by viscous diffusion
Generation

z component

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) + \rho g_z$$

Accumulation
Transport through surface by bulk flow
Transport through surface by viscous diffusion
Generation

Energy Balance

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + S_R$$

Accumulation
Transport through surface by bulk flow
Transport through surface by thermal diffusion
Generation

Mechanical Energy Balance

$$\rho \left(\frac{\partial \hat{K}}{\partial t} + v_x \frac{\partial \hat{K}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \hat{K}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \hat{K}}{\partial z} \right) = - \left(v_x \frac{\partial p}{\partial x} + v_y \frac{\partial p}{\partial y} + v_z \frac{\partial p}{\partial z} \right) + \rho (v_x g_x + v_y g_y + v_z g_z) + \text{irreversible losses}$$

Accumulation
Transport through surface by bulk flow
Work
Generation (consumption)

Bilaga till tentamen i Matematisk modellering:

The maximum likelihood estimate of the parameters β , \mathbf{b} , can be obtained as

$$\mathbf{b} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}$$

The variance can be estimated as the residual mean square:

$$s^2 = \frac{SS(\mathbf{b})}{N-P}$$

A $1-\alpha$ joint confidence region for β , i.e. accounting for the simultaneous variation of all the parameters is defined by

$$SS(\beta) \leq SS(\mathbf{b}) \left[1 + \frac{P}{N-P} F(P, N-P, \alpha) \right]$$

which in the linear case can be proven to be the ellipsoid

$$(\beta - \mathbf{b})^T \mathbf{X}^T \mathbf{X} (\beta - \mathbf{b}) \leq P s^2 F(P, N-P, \alpha)$$

where $F(P, N-P; \alpha)$ is the upper α quantile for the F distribution with P and $N-P$ degrees of freedom. Note also that $SS(\mathbf{b})$ is the minimum residual sum of squares.

A $1-\alpha$ marginal confidence interval for the parameter β_p is

$$b_p \pm se(b_p) t(N-P, \alpha/2)$$

where $t(N-P; \alpha/2)$ is the upper $\alpha/2$ quantile for the Student's t -distribution with $N-P$ degrees of freedom and the standard error of the parameter estimator is

$$se(b_p) = s \sqrt{\left\{ (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \right\}_{pp}}$$

with $\{(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}\}_{pp}$ equal to the p th diagonal term of the matrix $(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}$.

A $1-\alpha$ confidence interval for the expected response at \mathbf{x}_0 is

$$\mathbf{x}_0^T \mathbf{b} \pm s \sqrt{\mathbf{x}_0^T (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_0} t(N-P, \alpha/2)$$

A $1-\alpha$ confidence band for the response function at any \mathbf{x} is

$$\mathbf{x}^T \mathbf{b} \pm s \sqrt{\mathbf{x}^T (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}} \sqrt{P F(P, N-P, \alpha)}$$

The linear approximation can also be used to construct approximate confidence regions for the non-linear case. We can then use the same equations as for the non-linear case by replacing β by θ , \mathbf{b} by θ^* , \mathbf{X} by \mathbf{J}^* , $\mathbf{x}_0^T \mathbf{b}$ by $f(\mathbf{x}_0, \theta^*)$, and \mathbf{x}_0 by

$$\mathbf{j}_0 = \left. \frac{\partial f(\mathbf{x}_0, \theta)}{\partial \theta^T} \right|_{\theta^*}$$

PERCENTAGE POINTS, STUDENT'S *t*-DISTRIBUTION

This table gives values of *t* such that

$$F(t) = \int_{-\infty}^t \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} dx$$

for *n*, the number of degrees of freedom, equal to 1, 2, . . . , 30, 40, 60, 120, ∞; and for $F(t) = 0.60, 0.75, 0.90, 0.95, 0.975, 0.99, 0.995, \text{ and } 0.9995$. The *t*-distribution is symmetrical, so that $F(-t) = 1 - F(t)$

<i>n</i> \ <i>F</i>	.60	.75	.90	.95	.975	.99	.995	.9995
1	.325	1.000	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	636.619
2	.289	.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	31.598
3	.277	.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	12.924
4	.271	.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	8.610
5	.267	.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	6.869
6	.265	.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.959
7	.263	.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	5.408
8	.262	.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	5.041
9	.261	.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.781
10	.260	.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.587
11	.260	.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.437
12	.259	.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	4.318
13	.259	.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	4.221
14	.258	.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	4.140
15	.258	.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	4.073
16	.258	.690	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	4.015
17	.257	.689	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.965
18	.257	.688	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.922
19	.257	.688	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.883
20	.257	.687	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.850
21	.257	.686	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.819
22	.256	.686	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.792
23	.256	.685	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.767
24	.256	.685	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.745
25	.256	.684	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.725
26	.256	.684	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.707
27	.256	.684	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.690
28	.256	.683	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.674
29	.256	.683	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.659
30	.256	.683	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.646
40	.255	.681	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.551
60	.254	.679	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.460
120	.254	.677	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.373
∞	.253	.674	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.291

* This table is abridged from the "Statistical Tables" of R. A. Fisher and Frank Yates published by Oliver & Boyd, Ltd., Edinburgh and London, 1933. It is here published with the kind permission of the authors and their publishers.

F-Distribution

PERCENTAGE POINTS, F-DISTRIBUTION (Continued)

$$F(F) = \int_0^F \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)} (1+mx)^{-\frac{m+n}{2}} dx = .95$$

m \ n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	161.4	109.5	215.7	224.6	230.2	234.0	236.8	238.9	240.5	241.9	243.9	245.9	248.0	249.1	250.1	251.1	252.2	253.3	254.3
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.41	19.43	19.45	19.46	19.47	19.47	19.48	19.49	19.50
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.63	8.62	8.61	8.60	8.59
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.55	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.36
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.31	3.27	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	2.99	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.39	2.35	2.30
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.30	2.26	2.21
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.46	2.39	2.35	2.31	2.27	2.23	2.18	2.13
15	4.54	3.68	3.28	3.05	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.20	2.16	2.11	2.07
16	4.49	3.63	3.23	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.35	2.28	2.24	2.20	2.15	2.11	2.06	2.01
17	4.45	3.59	3.20	2.98	2.81	2.70	2.61	2.54	2.49	2.44	2.37	2.30	2.23	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01	1.96
18	4.41	3.55	3.16	2.94	2.77	2.66	2.57	2.50	2.45	2.40	2.33	2.26	2.19	2.15	2.11	2.06	2.02	1.97	1.92
19	4.38	3.52	3.13	2.91	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90	1.84
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.48	2.42	2.37	2.32	2.25	2.17	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87	1.81
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.11	2.03	1.99	1.94	1.90	1.85	1.80	1.74
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79	1.73
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77	1.71
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.58	2.47	2.38	2.32	2.26	2.22	2.14	2.07	1.99	1.95	1.90	1.85	1.80	1.75	1.69
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.45	2.36	2.30	2.24	2.19	2.12	2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.77	1.71	1.65
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.55	2.43	2.34	2.28	2.22	2.18	2.10	2.03	1.94	1.90	1.85	1.81	1.76	1.70	1.64
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.54	2.43	2.34	2.28	2.22	2.18	2.10	2.03	1.94	1.90	1.85	1.81	1.76	1.70	1.64
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.74	1.68	1.63
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.19	2.12	2.08	2.00	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.64	1.58	1.51
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.26	2.17	2.10	2.04	1.99	1.91	1.83	1.75	1.70	1.65	1.60	1.55	1.48	1.39
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.17	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.75	1.67	1.62	1.57	1.52	1.46	1.39	1.26
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.67	1.57	1.52	1.46	1.39	1.32	1.26	1.00

$F = \frac{f^2}{s^2} = \frac{S_1^2}{S_2^2} \cdot \frac{s_2^2}{s_1^2} \cdot \frac{df^2}{m/n}$, where $s_1^2 = S_1^2/m$ and $s_2^2 = S_2^2/n$ are independent mean squares estimating a common variance σ^2 and based on m and n degrees of freedom, respectively.