

TENTAMEN I MATEMATISK MODELLERING INOM KEMITEKNIKEN

KAA051 (KAA050)

Måndag 27 augusti 2007 kl 14.00-19.00 i V

Anders Rasmuson är anträffbar för frågor på telefonankn 2940 eller 27 36 06 och kommer att vara i tentamenslokalen någon gång mellan kl 16.00 och 17.00.

Granskning av tentamensrättningen kan ske tidigast den 14 september 2007.

Betygsgränser

Poäng:	0-14	15-19	20-24	25-
Betyg:	U	3	4	5

Tillåtna hjälpmedel

Skrivdon och valfri räknedosa (nollställd)

TEFYMA-tabellen

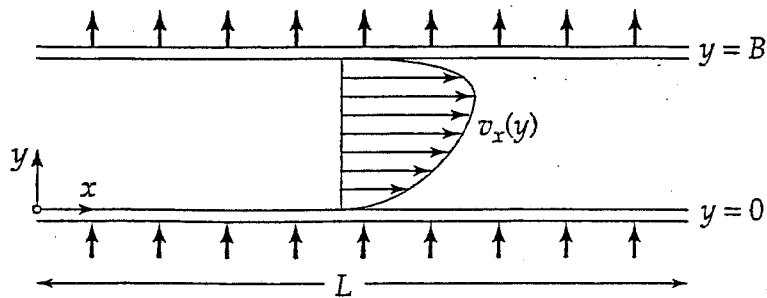
Physics Handbook

Standard Mathematical Tables

BETA Mathematics Handbook samt

Handbook of Chemistry and Physics

1. En vätska strömmar i positiv x-riktning genom en lång plan spalt med längd L , bredd W och höjd B , där $L \gg W \gg B$ (se Fig. 1). Spalten har porösa väggar vid $y=0$ och $y=B$, så att ett konstant tvärflöde, $v_y = v_0$, kan upprätthållas. Ställ, genom att stryka termer i den generella transportekvationen (se bilaga) för rörelsemängd, upp en stationär modell för hastighetsfördelningen $v_x(y)$! Motivera! (5p)



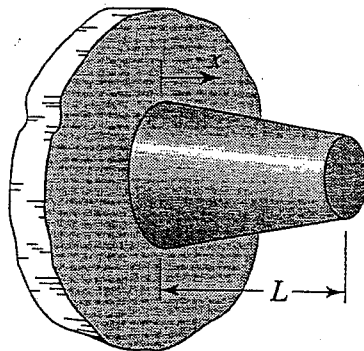
2. För att öka kylningen av en varm maskindel fastsätts flänsar i form av avsmalnande metallstavar (se Fig. 2). Ställ, med hjälp av skalbalans, upp en stationär modell för värmetransporten i en stav. Väggtemperaturen är T_0 och omgivningens temperatur är T_∞ . Radiella temperaturvariationer i staven kan försummas och konvektiva värmeöverföringskoefficienten, h , är given.

Tvärsnittsytan A och omkretsen P varierar med avståndet från väggen enligt:

$$A = A(x)$$

$$P = P(x)$$

(5p)



Uppgift 3

5 poäng

För ca 150 år sedan uppskattade lord Kelvin jordens ålder till ca 100 miljoner år. Han utgick från att jorden från början hade en temperatur av 6000 C och nu har en medeltemperatur av 3000 C. Han löste då värmeledningsekvationen för de olika zonerna

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_3^2} \right)$$

med randvärdena

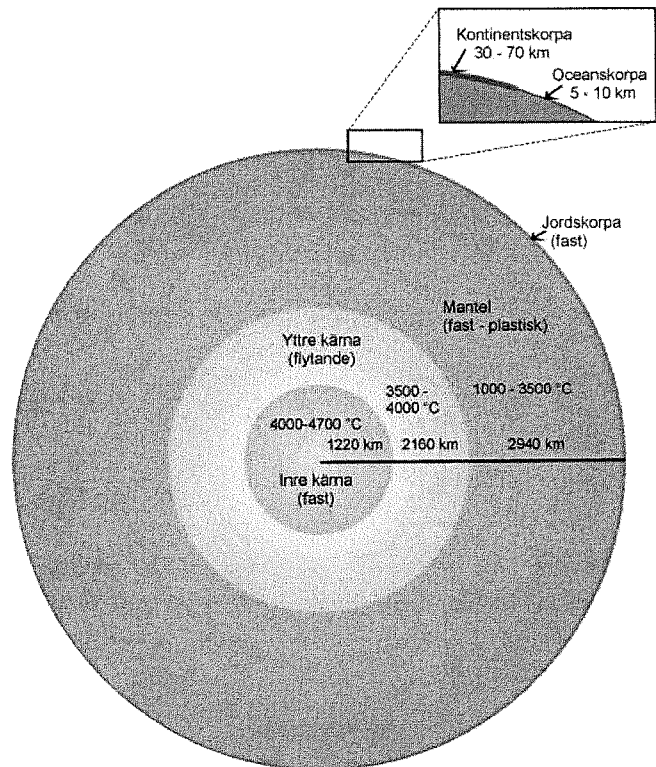
$$\lambda n \left(\frac{dT}{dx_1} + \frac{dT}{dx_2} + \frac{dT}{dx_3} \right) = \sigma T^4 \text{ vid ytan}$$

$$\text{och } \frac{dT}{dx_i} = 0 \text{ i centrum } x_i = 0$$

där n är normalen mot ytan.

Diskutera hur de i kompendiet föreslagna metoderna nedan skulle kunna användas för att förenkla beräkningarna.

- Decoupling of equations
- Reducing the number of independent variables
- Separation of equations into steady-state and transient
- Simplified geometry
- Linearizing
- Neglecting terms
- Solving for limiting cases



Uppgift 4

5 poäng

Lös de kopplade differentialekvationerna med någon form av viktade residualer

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} + 5 \frac{dy_1}{dx} + 5 y_1 y_2 = 0$$

$$\frac{d^2 y_2}{dx^2} + \frac{dy_2}{dx} + \frac{dy_1}{dx} + 5 y_1 y_2 = 0$$

$$\text{med } \frac{dy_1}{dx} = \frac{dy_2}{dx} = 0 \text{ vid } x = 0$$

$$\text{och } y_1 = y_2 = 1 \text{ vid } x = 1$$

Uppgift 5 (6 poäng)

Värmeöverföringen i turbulent fallfilm för ett rent ämne brukar ofta beskrivas med sambandet

$$Nu = C Re^n Pr^m$$

där C, n och m är modellens parametrar. En undersökning Alhousseini och Chen gav följande resultat:

Nr	Re	Uppmätt Nu	Pr
1	15594	0,227	1,69
2	11317	0,229	1,73
3	5511	0,188	1,73
4	6498	0,284	4,42
5	4879	0,251	4,38
6	3217	0,226	4,37
7	1643	0,562	47,87
8	1116	0,437	46,73

Utgående från mätdata har parametrarna (C, n och m) bestämts genom minimering av residualkvadratsumman SS. I minimipunkten erhöles följande värden:

C	0,031		
n	0,188		
m	0,37		
SS	4,141 · 10 ⁻³		
$\mathbf{J}^T \mathbf{J}$	855,794	214,342	74,493
	214,342	52,473	17,091
	74,493	17,091	7,873
$(\mathbf{J}^T \mathbf{J})^{-1}$	1,315	-4,504	-2,669
	-4,504	15,485	8,997
	-2,669	8,997	5,849

- Bestäm individuella 95%-iga konfidensintervall för n och m!
- I värmeöverföringssammanhang brukar det anses bra om en korrelation kan förutsäga inom ± 10%. Undersök om modellen kan anses bra i detta avseende genom att beräkna ett 95%-igt konfidensintervall för prediktionen (dvs för Nu) i en punkt där Re=4879 och Pr=4,38.
- Beräkna korrelationsmatrisen. Är modellen bra i detta avseende?

Ledning:

Korrelationskoefficientmatrisen C beräknas enligt

$$C_{i,j} = \frac{D_{ij}}{\sqrt{D_{i,i} \cdot D_{j,j}}}, \text{ där } \mathbf{D} = (\mathbf{J}^T \mathbf{J})^{-1}$$

Se bilaga för övriga tabeller och formler.

Uppgift 6 (4 poäng)

- a) Modellen i uppgift 5 kan transformeras till en linjär funktion genom

$$y = \ln(Nu) = \ln(C) + n \ln(Re) + m \ln(Pr)$$

Undersök på lämpligt sätt vilken av modellformuleringarna, den icke-linjära i uppgift 5, eller den linjära här som bäst uppfyller förutsättningen att variansen skall vara konstant. Till din hjälp finns följande funktionsvärden beräknade:

Nr	Beräknat Nu Icke linjär modell	ln(Uppmätt Nu)	Beräknat y Linjär modell
1	0,230	-1,483	-1,431
2	0,218	-1,474	-1,511
3	0,191	-1,671	-1,712
4	0,278	-1,259	-1,269
5	0,263	-1,382	-1,353
6	0,243	-1,487	-1,471
7	0,518	-0,576	-0,647
8	0,477	-0,828	-0,766

Undersökningen behöver inte göras fullständigt i alla avseenden, det räcker med att göra den i ett avseende.

- b) Vi har fått tillgång till ytterligare några mätresultat:

Nr	Re	Uppmätt Nu	Pr
9	15538	0,230	1,69
10	11317	0,223	1,73
11	6498	0,286	4,42
12	6498	0,278	4,42

Går det att när vi har tillgång till även dessa data göra en sk lack-of-fit-analys av modellen i uppgift 5, eller krävs någon ytterligare information? Beskriv också hur (i princip) analysen går till och hur man tolkar resultatet.

Appendix A: Microscopic transport equations

Table A1 Microscopic transport equations in rectangular coordinates

Mass Balance for Component A in Dilute Binary System

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} + v_x \frac{\partial c_A}{\partial x} + v_y \frac{\partial c_A}{\partial y} + v_z \frac{\partial c_A}{\partial z} = \mathcal{D}_{AB} \left(\frac{\partial^2 c_A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c_A}{\partial z^2} \right) + R_A$$

Accumulation
Transport through surface by bulk flow
Transport through surface by mass diffusion
Generation

Mass Balance for i^{th} Specie (Multicomponent)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_i}{\partial t} + v_x \frac{\partial \rho_i}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho_i}{\partial y} + v_z \frac{\partial \rho_i}{\partial z} \\ = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{c^2}{\rho} \sum_{j=1}^n M_i M_j \mathcal{D}_{ij} \left[x_j \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \left(\frac{\partial \ln a_j}{\partial x_k} \right) \frac{\partial x_k}{\partial x} \right] \right\} \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{c^2}{\rho} \sum_{j=1}^n M_i M_j \mathcal{D}_{ij} \left[x_j \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \left(\frac{\partial \ln a_j}{\partial x_k} \right) \frac{\partial x_k}{\partial y} \right] \right\} \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{c^2}{\rho} \sum_{j=1}^n M_i M_j \mathcal{D}_{ij} \left[x_j \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \left(\frac{\partial \ln a_j}{\partial x_k} \right) \frac{\partial x_k}{\partial z} \right] \right\} + r_i \end{aligned}$$

Accumulation
Transport through surface by bulk flow
Transport through surface by mass diffusion
Generation

Mass Balance (Total)

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

Transport by bulk flow

Momentum Balance

x component

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \\ = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) + \rho g_x \end{aligned}$$

Accumulation
Transport through surface by bulk flow
Transport through surface by viscous diffusion
Generation

y component

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \\ = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) + \rho g_y \end{aligned}$$

Accumulation
Transport through surface by bulk flow
Transport through surface by viscous diffusion
Generation

z component

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \\ = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) + \rho g_z \end{aligned}$$

Accumulation
Transport through surface by bulk flow
Transport through surface by viscous diffusion
Generation

Energy Balance

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + S_R$$

Accumulation
Transport through surface by bulk flow
Transport through surface by thermal diffusion
Generation

Mechanical Energy Balance

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial \hat{K}}{\partial t} + v_x \frac{\partial \hat{K}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \hat{K}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \hat{K}}{\partial z} \right) = - \left(v_x \frac{\partial p}{\partial x} + v_y \frac{\partial p}{\partial y} + v_z \frac{\partial p}{\partial z} \right) \\ + \rho (v_x g_x + v_y g_y + v_z g_z) + \text{irreversible losses} \end{aligned}$$

Accumulation
Transport through surface by bulk flow
Work
Generation (consumption)

Table A2 Microscopic transport equations in cylindrical coordinates

Mass Balance for Component A in Dilute Binary System

$$\begin{aligned} \frac{\partial c_A}{\partial t} + \left(v_r \frac{\partial c_A}{\partial r} + v_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial c_A}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial c_A}{\partial z} \right) \\ \text{Accumulation} \quad \text{Transport through surface by bulk flow} \\ = \mathcal{D}_{AB} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial c_A}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 c_A}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 c_A}{\partial z^2} \right] + R_A \\ \text{Transport through surface by mass diffusion} \quad \text{Generation} \end{aligned}$$

Mass Balance for i^{th} Specie (Multicomponent)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_i}{\partial t} + v_r \frac{\partial \rho_i}{\partial r} + v_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial \rho_i}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial \rho_i}{\partial z} \\ \text{Accumulation} \quad \text{Transport through surface by bulk flow} \\ = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \left\{ \frac{c^2}{\rho} \sum_{j=1}^n M_i M_j \mathcal{D}_{ij} \left[x_j \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \left(\frac{\partial \ln a_j}{\partial x_k} \right) \frac{\partial x_k}{\partial r} \right] \right\} \\ + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \frac{c^2}{\rho} \sum_{j=1}^n M_i M_j \mathcal{D}_{ij} \left[x_j \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \left(\frac{\partial \ln a_j}{\partial x_k} \right) \frac{1}{r} \frac{\partial x_k}{\partial \theta} \right] \right\} \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{c^2}{\rho} \sum_{j=1}^n M_i M_j \mathcal{D}_{ij} \left[x_j \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \left(\frac{\partial \ln a_j}{\partial x_k} \right) \frac{\partial x_k}{\partial z} \right] \right\} + r_i \\ \text{Transport through surface by mass diffusion} \quad \text{Generation} \end{aligned}$$

Mass Balance (Total)

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

Transport by bulk flow

Momentum Balance

r component

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \\ \text{Accumulation} \quad \text{Transport through surface by bulk flow} \\ = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right\} + \rho g_r \\ \text{Transport through surface by viscous diffusion} \quad \text{Generation} \end{aligned}$$

θ component

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) \\ \text{Accumulation} \quad \text{Transport through surface by bulk flow} \\ = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_\theta) \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right\} + \rho g_\theta \\ \text{Transport through surface by viscous diffusion} \quad \text{Generation} \end{aligned}$$

z component

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \\ \text{Accumulation} \quad \text{Transport through surface by bulk flow} \\ = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] + \rho g_z \\ \text{Transport through surface by viscous diffusion} \quad \text{Generation} \end{aligned}$$

Bilaga till tentamen i Matematisk modellering:

The maximum likelihood estimate of the parameters β , \mathbf{b} , can be obtained as

$$\mathbf{b} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}$$

The variance can be estimated as the residual mean square:

$$s^2 = \frac{SS(\mathbf{b})}{N - P}$$

A $1-\alpha$ joint confidence region for β , i.e. accounting for the simultaneous variation of all the parameters is defined by

$$SS(\beta) \leq SS(\mathbf{b}) \left[1 + \frac{P}{N - P} F(P, N - P, \alpha) \right]$$

which in the linear case can be proven to be the ellipsoid

$$(\beta - \mathbf{b})^T \mathbf{X}^T \mathbf{X} (\beta - \mathbf{b}) \leq P s^2 F(P, N - P, \alpha)$$

where $F(P, N - P; \alpha)$ is the upper α quantile for the F distribution with P and $N - P$ degrees of freedom. Note also that $SS(\mathbf{b})$ is the minimum residual sum of squares.

A $1-\alpha$ marginal confidence interval for the parameter β_p is

$$b_p \pm se(b_p) t(N - P, \alpha/2)$$

where $t(N - P; \alpha/2)$ is the upper $\alpha/2$ quantile for the Student's t -distribution with $N - P$ degrees of freedom and the standard error of the parameter estimator is

$$se(b_p) = s \sqrt{\left\{ (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \right\}_{pp}}$$

with $\{(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}\}_{pp}$ equal to the p th diagonal term of the matrix $(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}$.

A $1-\alpha$ confidence interval for the expected response at \mathbf{x}_0 is

$$\mathbf{x}_0^T \mathbf{b} \pm s \sqrt{\mathbf{x}_0^T (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_0} t(N - P, \alpha/2)$$

A $1-\alpha$ confidence band for the response function at any \mathbf{x} is

$$\mathbf{x}^T \mathbf{b} \pm s \sqrt{\mathbf{x}^T (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}} \sqrt{P F(P, N - P, \alpha)}$$

The linear approximation can also be used to construct approximate confidence regions for the non-linear case. We can then use the same equations as for the non-linear case by replacing β by θ , \mathbf{b} by θ^* , \mathbf{X} by \mathbf{J}^* , $\mathbf{x}_0^T \mathbf{b}$ by $f(\mathbf{x}_0, \theta^*)$, and \mathbf{x}_0 by

$$\mathbf{j}_0 = \left. \frac{\partial f(\mathbf{x}_0, \theta)}{\partial \theta^T} \right|_{\theta^*}$$

PERCENTAGE POINTS, STUDENT'S *t*-DISTRIBUTION

This table gives values of *t* such that

$$F(t) = \int_{-\infty}^t \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{nx} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} dx$$

for *n*, the number of degrees of freedom, equal to 1, 2, . . . , 30, 40, 60, 120, ∞; and for $F(t) = 0.60, 0.75, 0.90, 0.95, 0.975, 0.99, 0.995,$ and 0.9995 . The *t*-distribution is symmetrical, so that $F(-t) = 1 - F(t)$

<i>n</i> \ <i>F</i>	.60	.75	.90	.95	.975	.99	.995	.9995
1	.325	1.000	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	636.619
2	.289	.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	31.598
3	.277	.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	12.924
4	.271	.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	8.610
5	.267	.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	6.869
6	.265	.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.959
7	.263	.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	5.408
8	.262	.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	5.041
9	.261	.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.731
10	.260	.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.537
11	.260	.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.437
12	.259	.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	4.318
13	.259	.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	4.221
14	.258	.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	4.140
15	.258	.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	4.073
16	.258	.690	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	4.015
17	.257	.689	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.965
18	.257	.688	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.922
19	.257	.688	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.883
20	.257	.687	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.850
21	.257	.686	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.819
22	.256	.686	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.792
23	.256	.685	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.767
24	.256	.685	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.745
25	.256	.684	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.725
26	.256	.684	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.707
27	.256	.684	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.690
28	.256	.683	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.674
29	.256	.683	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.659
30	.256	.683	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.646
40	.255	.681	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.551
60	.254	.679	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.460
120	.254	.677	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.373
∞	.253	.674	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.291

* This table is abridged from the "Statistical Tables" of R. A. Fisher and Frank Yates published by Oliver & Boyd, Ltd., Edinburgh and London, 1933. It is here published with the kind permission of the authors and their publishers.

1
1
2
2
3
3
4
4
5
5
6
6
7
7

F-Distribution

PERCENTAGE POINTS, F-DISTRIBUTION (Continued)

$$F(F) = \int_0^F \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{m^{\frac{m}{2}} n^{\frac{n}{2}} x^{\frac{m}{2}-1}}{m^{\frac{m}{2}} n^{\frac{n}{2}} x^{\frac{m}{2}-1} (n+mx)^{\frac{m+n}{2}}} dx = .95$$

m \ n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	161.4	109.5	215.7	221.6	230.2	234.0	236.8	238.9	240.5	241.9	243.9	245.9	248.0	249.1	250.1	251.1	252.2	253.3	254.3
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.41	19.43	19.45	19.45	19.46	19.47	19.48	19.49	19.50
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.56	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.36
6	5.90	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	3.99	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67
7	5.50	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.31	3.27	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.16	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.82	2.79	2.75	2.71
10	4.90	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	2.99	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.38	2.34	2.29
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.29	2.25	2.21
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.46	2.39	2.35	2.31	2.27	2.22	2.18	2.14
15	4.54	3.68	3.28	3.05	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.21	2.16	2.12	2.07
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.35	2.28	2.24	2.20	2.16	2.11	2.06	2.01
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.62	2.55	2.49	2.44	2.37	2.30	2.23	2.19	2.15	2.11	2.06	2.02	1.97
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.45	2.40	2.33	2.26	2.19	2.15	2.11	2.07	2.02	1.98	1.93
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.37	2.30	2.23	2.16	2.12	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88
20	4.35	3.49	3.09	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.34	2.27	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90	1.84
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.48	2.42	2.36	2.31	2.24	2.17	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87	1.81
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.39	2.34	2.28	2.21	2.14	2.07	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.26	2.20	2.13	2.05	2.01	1.96	1.91	1.86	1.81	1.75
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.24	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79	1.73
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.22	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77	1.71
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.58	2.47	2.38	2.32	2.26	2.20	2.14	2.07	1.99	1.95	1.90	1.85	1.80	1.75	1.69
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.30	2.24	2.18	2.12	2.05	1.97	1.93	1.88	1.84	1.79	1.73	1.67
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.55	2.44	2.35	2.28	2.22	2.16	2.10	2.03	1.94	1.90	1.85	1.81	1.76	1.71	1.65
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.54	2.43	2.34	2.27	2.21	2.15	2.09	2.02	1.94	1.90	1.85	1.81	1.76	1.70	1.64
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.26	2.20	2.14	2.08	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.74	1.68	1.62
40	4.00	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.06	2.00	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.64	1.58	1.51
60	4.00	3.23	2.76	2.53	2.37	2.26	2.17	2.09	2.03	1.97	1.91	1.83	1.75	1.70	1.65	1.60	1.55	1.47	1.39
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.01	1.95	1.89	1.83	1.75	1.67	1.61	1.55	1.50	1.43	1.33	1.25
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.93	1.87	1.81	1.75	1.67	1.59	1.52	1.46	1.39	1.33	1.23	1.00

$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} \frac{S_1}{m} / \frac{S_2}{n}$, where s_1 and s_2 are independent mean squares estimating a common variance σ^2 and based on m and n degrees of freedom, respectively.