

# TENTAMEN I MATEMATISK MODELLERING INOM KEMITEKNIKEN

KAA051 (KAA050)

Måndag 25 augusti 2008 kl 14.00-19.00 i M

---

Anders Rasmuson är anträffbar för frågor på telefonankn 2940 eller 27 36 06 och kommer att vara i tentamenslokalen någon gång mellan kl 16.00 och 17.00

---

Granskning av tentamensrättningen kan ske tidigast den 12 september 2008.

## Betygsgränser

Poäng:	0-14	15-19	20-24	25-
Betyg:	U	3	4	5

---

## Tillåtna hjälpmedel

Skrivdon och valfri räknedosa (nollställd)

TEFYMA-tabellen

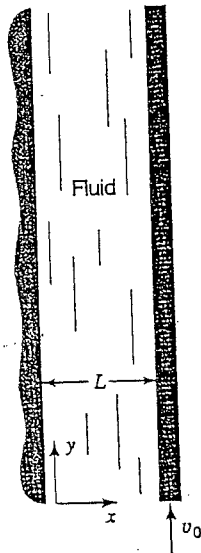
Physics Handbook

Standard Mathematical Tables

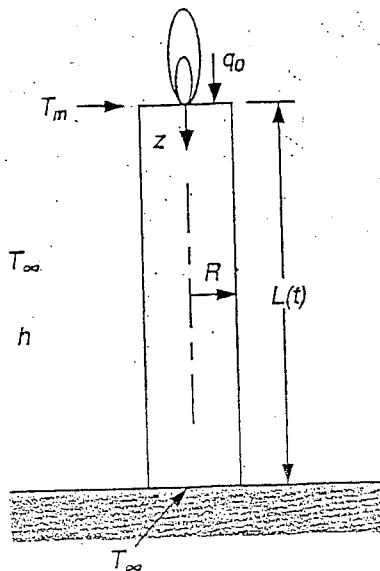
BETA Mathematics Handbook samt

Handbook of Chemistry and Physics

1. En vätska strömmar laminärt mellan två vertikala plattor under inflytande av en konstant nedåtriktad tryckgradient. Ena ytan (till vänster) står stilla och den högra rör sig uppåt med hastigheten  $v_0$  (se Figur). Ställ, genom att stryka termer i den generella transportekvationen (se bilaga), upp en stationär modell för hastighetsfördelningen  $v_y(x)$ ! Motivera! (4p)



2. Då ett ljus tänds kommer stearinet närmast lågan att nå smälttemperaturen  $T_m$  och ljuset börjar smälta (se Figur). Antag att netto värmefflux (instrålning minus konvektion ut) till toppytan,  $q_0$ , är konstant och att det smälta skiktet är tunt. Värmeförluster från ljusets mantelyta kan inte försummas, men antag för enkelhets skull att radiella temperaturvariationer är små. Basen av ljuset hålls vid konstant omgivningstemperatur  $T_\infty$ . Ställ upp en modell för att beräkna  $L(t)$ ! Höjden är ursprungligen  $L_0$ . (6p)



### Uppgift 3

(4 poäng)

a)

För en icke-adiabatisk cylindrisk tubreaktor kan värmebalansen beskrivas enligt:

$$\rho C_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = k \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + Q \quad (1)$$

där  $z$  är längden och  $r$  radien på cylindern (enhet m). Ta fram uttryck för tidskonstanten för de olika processerna i ekvationen ovan (ej för reaktionsvärmets). Totala längden är  $L$  och radien  $R_{\text{tot}}$  och temperaturen in i cylindern  $T_{\text{IN}}$  och ut  $T_{\text{UT}}$ . Motivering krävs.

b)

Antag stationära betingelser och anta att temperaturen är konstant i radiell led. Reaktionen är exoterm och har nått 100% omsättning efter längden  $0.9L$ . Ange kriterier för när den axiella ledningen kan försummas. Motivering av alla antagande krävs.

#### Uppgift 4

(6 poäng)

En sfärisk katalysator används för en exoterm reaktion. Materialbalansen är

$$\frac{d^2 c}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dc}{dr} - R_A = 0$$

och värmebalansen

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dT}{dr} + \beta R_A = 0$$

Reaktionshastigheten beskrivs av

$$R_A = kc^2$$

Där hastighetskonstanten beskrivs av Arrhenius ekvationen:

$$k = Ae^{-E_a/(RT)}$$

Där A är den pre-exponentiella faktorn och  $E_a$  aktiveringsenergin. Använd valfri viktad residual för att beskriva hur koncentrationen  $c$  beror av radien. Motivera val av randvillkor.

**OBS: Ekvationerna behöver ej lösas, men lösningsgången måste beskrivas i detalj.**

Uppgift 5 (6 poäng)

Vid modellering av termodynamik för blandningar använder man sig ofta av s.k aktivitetsfaktormodeller. Denna uppgift handlar om parameterskattning i en modell för att beskriva hur trycket (P) varierar med sammansättningen för en viss temperatur. Här använder vi oss av van Laars aktivitetsfaktormodell som för en binär blandning kan uttryckas som

$$P = P_1^{sat} \gamma_1 x + P_2^{sat} \gamma_2 (1-x)$$

där

$x$  = molfraktion av ämne 1 i vätskefasen

$P_i^{sat}$  = ångtryck av rent ämne i

$$\ln \gamma_1 = \frac{\theta_1}{\left[1 + \frac{\theta_1 x}{\theta_2 (1-x)}\right]^2} \quad \text{och} \quad \ln \gamma_2 = \frac{\theta_2}{\left[1 + \frac{\theta_2 (1-x)}{\theta_1 x}\right]^2}$$

Vi har följande mätdata för blandningen metanol (ämne 1) och bensen (ämne 2) vid 90 °C:

Mät punkt nr	x	y molfraktion ämne 1 i gasfas	P torr
1	0,117	0,502	1865
2	0,257	0,594	2113
3	0,376	0,618	2218
4	0,549	0,65	2273
5	0,707	0,689	2292
6	0,856	0,765	2208

Från litteraturdata har vi att  $P_1^{sat}(90\text{ °C}) = 1918$  torr och  $P_2^{sat}(90\text{ °C}) = 1022$  torr.

Genom minimering av residualkvadratsumman bestämdes parametrarna till  $\theta_1 = 1,863$  och  $\theta_2 = 1,636$ . Residualkvadratsumman SS blev 2601 torr<sup>2</sup>,

$$(\mathbf{J}^T \mathbf{J})^{-1} = \begin{pmatrix} 4,427 & -2,764 \\ -2,764 & 3,017 \end{pmatrix} \cdot 10^{-6}$$

och

$$\mathbf{J}^T \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0,52797 & 0,48372 \\ 0,48372 & 0,77461 \end{pmatrix} \cdot 10^6$$

Det går (utan regression) att bestämma modellens parametrar från mätvärden för x, y och P i en enda punkt. En sådan bestämning för sista punkten ovan ger parametervärdena  $\theta_1^p = 2,03$  och  $\theta_2^p = 1,62$ .

- a) Ligger "enpunktsp parametrarna" ( $\theta_1^p$  och  $\theta_2^p$ ) innanför individuella 95 %-iga

- konfidensintervall för våra parametrar?
- b) Ligger "enpunktsparametrarna" innanför ett sammansatt 95 %-igt konfidensområde med korrekt konfidensgrad (men inte nödvändigtvis korrekt form) för våra parametrar?
- c) Klarar modellen med våra parametrar att förutsäga trycket för  $x = 0,5$  inom  $\pm 1$  %? Undersök detta genom att bestämma lämpligt konfidensintervall. Modellens beräknade värde för  $x=0,5$  är 2254 torr,  $\frac{\partial P}{\partial \theta_1} = 168,7$  torr och  $\frac{\partial P}{\partial \theta_2} = 397$  torr .

Se bilaga för tabeller och formler.

#### Uppgift 6 (4 poäng)

- a) Med våra parametrar och modellen i uppgift 5 fås följande beräknade värden för trycket P:

Mätpunkt nr	P (beräknad) torr
1	1844
2	2151
3	2225
4	2261
5	2270
6	2203

Undersök med hjälp av detta på lämpligt sätt om modellen i uppgift 5 kan förbättras och i så fall hur!

- b) Beskriv en metod (annan än den du använt i uppgift 6a) som kan användas för att undersöka om det är troligt att modellen kan förbättras ytterligare. Du behöver inte göra några beräkningar och några exakta formuleringar av ekvationer krävs ej, men proceduren och ingående variablers innebörd skall beskrivas. Förklara varför (och till vad som) upprepade försök i samma punkt krävs.

# Appendix A: Microscopic transport equations

Table A1 Microscopic transport equations in rectangular coordinates

## Mass Balance for Component A in Dilute Binary System

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} + v_x \frac{\partial c_A}{\partial x} + v_y \frac{\partial c_A}{\partial y} + v_z \frac{\partial c_A}{\partial z} = \mathcal{D}_{AB} \left( \frac{\partial^2 c_A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c_A}{\partial z^2} \right) + R_A$$

Accumulation
Transport through surface by bulk flow
Transport through surface by mass diffusion
Generation

## Mass Balance for $i^{\text{th}}$ Specie (Multicomponent)

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + v_x \frac{\partial \rho_i}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho_i}{\partial y} + v_z \frac{\partial \rho_i}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{c^2}{\rho} \sum_{j=1}^n M_i M_j \mathcal{D}_{ij} \left[ x_j \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \left( \frac{\partial \ln a_j}{\partial x_k} \right) \frac{\partial x_k}{\partial x} \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{c^2}{\rho} \sum_{j=1}^n M_i M_j \mathcal{D}_{ij} \left[ x_j \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \left( \frac{\partial \ln a_j}{\partial x_k} \right) \frac{\partial x_k}{\partial y} \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{c^2}{\rho} \sum_{j=1}^n M_i M_j \mathcal{D}_{ij} \left[ x_j \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \left( \frac{\partial \ln a_j}{\partial x_k} \right) \frac{\partial x_k}{\partial z} \right] \right\} + r_i$$

Accumulation
Transport through surface by bulk flow
Transport through surface by mass diffusion
Generation

## Mass Balance (Total)

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

Transport by bulk flow

## Momentum Balance

### x component

$$\rho \left( \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) + \rho g_x$$

Accumulation
Transport through surface by bulk flow
Transport through surface by viscous diffusion
Generation

### y component

$$\rho \left( \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) + \rho g_y$$

Accumulation
Transport through surface by bulk flow
Transport through surface by viscous diffusion
Generation

### z component

$$\rho \left( \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) + \rho g_z$$

Accumulation
Transport through surface by bulk flow
Transport through surface by viscous diffusion
Generation

## Energy Balance

$$\rho C_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + S_x$$

Accumulation
Transport through surface by bulk flow
Transport through surface by thermal diffusion
Generation

## Mechanical Energy Balance

$$\rho \left( \frac{\partial \hat{K}}{\partial t} + v_x \frac{\partial \hat{K}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \hat{K}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \hat{K}}{\partial z} \right) = - \left( v_x \frac{\partial p}{\partial x} + v_y \frac{\partial p}{\partial y} + v_z \frac{\partial p}{\partial z} \right) + \rho (v_x g_x + v_y g_y + v_z g_z) + \text{irreversible losses}$$

Accumulation
Transport through surface by bulk flow
Work
Generation (consumption)

## Bilaga till tentamen i Matematisk modellering:

The maximum likelihood estimate of the parameters  $\beta$ ,  $\mathbf{b}$ , can be obtained as

$$\mathbf{b} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}$$

The variance can be estimated as the residual mean square:

$$s^2 = \frac{SS(\mathbf{b})}{N - P}$$

A  $1-\alpha$  joint confidence region for  $\beta$ , i.e. accounting for the simultaneous variation of all the parameters is defined by

$$SS(\beta) \leq SS(\mathbf{b}) \left[ 1 + \frac{P}{N - P} F(P, N - P, \alpha) \right]$$

which in the linear case can be proven to be the ellipsoid

$$(\beta - \mathbf{b})^T \mathbf{X}^T \mathbf{X} (\beta - \mathbf{b}) \leq P s^2 F(P, N - P, \alpha)$$

where  $F(P, N - P; \alpha)$  is the upper  $\alpha$  quantile for the F distribution with  $P$  and  $N - P$  degrees of freedom. Note also that  $SS(\mathbf{b})$  is the minimum residual sum of squares.

A  $1-\alpha$  marginal confidence interval for the parameter  $\beta_p$  is

$$b_p \pm se(b_p) t(N - P, \alpha/2)$$

where  $t(N - P; \alpha/2)$  is the upper  $\alpha/2$  quantile for the Student's  $t$ -distribution with  $N - P$  degrees of freedom and the standard error of the parameter estimator is

$$se(b_p) = s \sqrt{\left\{ (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \right\}_{pp}}$$

with  $\left\{ (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \right\}_{pp}$  equal to the  $p$ th diagonal term of the matrix  $(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}$ .

A  $1-\alpha$  confidence interval for the expected response at  $\mathbf{x}_0$  is

$$\mathbf{x}_0^T \mathbf{b} \pm s \sqrt{\mathbf{x}_0^T (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_0} t(N - P, \alpha/2)$$

A  $1-\alpha$  confidence band for the response function at any  $\mathbf{x}$  is

$$\mathbf{x}^T \mathbf{b} \pm s \sqrt{\mathbf{x}^T (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}} \sqrt{P F(P, N - P, \alpha)}$$

The linear approximation can also be used to construct approximate confidence regions for the non-linear case. We can then use the same equations as for the non-linear case by replacing  $\beta$  by  $\theta$ ,  $\mathbf{b}$  by  $\theta^*$ ,  $\mathbf{X}$  by  $\mathbf{J}^*$ ,  $\mathbf{x}_0^T \mathbf{b}$  by  $f(\mathbf{x}_0, \theta^*)$ , and  $\mathbf{x}_0$  by

$$\mathbf{j}_0 = \left. \frac{\partial f(\mathbf{x}_0, \theta)}{\partial \theta^T} \right|_{\theta^*}$$



## PERCENTAGE POINTS, STUDENT'S *t*-DISTRIBUTION

This table gives values of *t* such that

$$F(t) = \int_{-\infty}^t \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{ns} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} dx$$

for *n*, the number of degrees of freedom, equal to 1, 2, . . . , 30, 40, 60, 120, ∞; and for  $F(t) = 0.60, 0.75, 0.90, 0.95, 0.975, 0.99, 0.995, \text{ and } 0.9995$ . The *t*-distribution is symmetrical, so that  $F(-t) = 1 - F(t)$

<i>n</i> \ <i>F</i>	.60	.75	.90	.95	.975	.99	.995	.9995
1	.325	1.000	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	636.619
2	.289	.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	31.598
3	.277	.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	12.924
4	.271	.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	8.610
5	.267	.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	6.869
6	.265	.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.959
7	.263	.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	5.408
8	.262	.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	5.041
9	.261	.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.781
10	.260	.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.587
11	.260	.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.457
12	.259	.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	4.318
13	.259	.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	4.221
14	.258	.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	4.140
15	.258	.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	4.073
16	.258	.690	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	4.015
17	.257	.689	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.965
18	.257	.688	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.922
19	.257	.688	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.883
20	.257	.687	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.850
21	.257	.686	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.819
22	.256	.686	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.792
23	.256	.685	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.767
24	.256	.685	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.745
25	.256	.684	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.725
26	.256	.684	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.707
27	.256	.684	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.690
28	.256	.683	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.674
29	.256	.683	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.659
30	.256	.683	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.646
40	.255	.681	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.551
60	.254	.679	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.460
120	.254	.677	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.373
∞	.253	.674	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.291

\* This table is abridged from the "Statistical Tables" of R. A. Fisher and Frank Yates published by Oliver & Boyd, Ltd., Edinburgh and London, 1933. It is here published with the kind permission of the authors and their publishers.

F-Distribution

PERCENTILE POINTS, F-DISTRIBUTION (Continued)

$$F(F) = \int_0^F \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{m^n x^{m-1} (1+mx)^{-\frac{m+n}{2}}}{m^2 n^2 x^2} dx = .05$$

m \ n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	$\infty$
1	161.4	109.5	81.9	63.7	51.5	43.0	37.5	33.0	29.5	26.8	24.3	21.9	19.4	17.0	14.6	12.1	10.4	8.5	7.0
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.41	19.43	19.45	19.46	19.46	19.47	19.48	19.49	19.50
3	10.13	9.85	9.78	9.80	9.81	9.82	9.83	9.84	9.85	9.86	9.87	9.88	9.89	9.90	9.91	9.92	9.93	9.94	9.95
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.20	6.16	6.13	6.11	6.09	6.08	6.07	6.07	6.07	6.07	6.07	6.07	6.07	6.07	6.07
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.98	4.93	4.89	4.87	4.86	4.86	4.86	4.86	4.86	4.86	4.86	4.86	4.86	4.86
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.32	4.28	4.25	4.24	4.24	4.24	4.24	4.24	4.24	4.24	4.24	4.24	4.24	4.24
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.90	3.87	3.84	3.83	3.83	3.83	3.83	3.83	3.83	3.83	3.83	3.83	3.83	3.83
8	5.33	4.46	4.07	3.84	3.69	3.62	3.58	3.55	3.54	3.54	3.54	3.54	3.54	3.54	3.54	3.54	3.54	3.54	3.54
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.41	3.37	3.34	3.33	3.33	3.33	3.33	3.33	3.33	3.33	3.33	3.33	3.33	3.33
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.26	3.22	3.19	3.18	3.18	3.18	3.18	3.18	3.18	3.18	3.18	3.18	3.18	3.18
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.13	3.09	3.06	3.05	3.05	3.05	3.05	3.05	3.05	3.05	3.05	3.05	3.05	3.05
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.10	3.03	2.99	2.96	2.95	2.95	2.95	2.95	2.95	2.95	2.95	2.95	2.95	2.95	2.95
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.02	2.95	2.91	2.88	2.87	2.87	2.87	2.87	2.87	2.87	2.87	2.87	2.87	2.87	2.87
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.95	2.88	2.84	2.81	2.80	2.80	2.80	2.80	2.80	2.80	2.80	2.80	2.80	2.80	2.80
15	4.54	3.68	3.28	3.05	2.89	2.82	2.78	2.75	2.74	2.74	2.74	2.74	2.74	2.74	2.74	2.74	2.74	2.74	2.74
16	4.49	3.63	3.23	3.00	2.84	2.77	2.73	2.70	2.69	2.69	2.69	2.69	2.69	2.69	2.69	2.69	2.69	2.69	2.69
17	4.45	3.59	3.19	2.96	2.80	2.73	2.69	2.66	2.65	2.65	2.65	2.65	2.65	2.65	2.65	2.65	2.65	2.65	2.65
18	4.41	3.55	3.15	2.92	2.76	2.69	2.65	2.62	2.61	2.61	2.61	2.61	2.61	2.61	2.61	2.61	2.61	2.61	2.61
19	4.38	3.52	3.12	2.89	2.73	2.66	2.62	2.59	2.58	2.58	2.58	2.58	2.58	2.58	2.58	2.58	2.58	2.58	2.58
20	4.35	3.49	3.09	2.86	2.70	2.63	2.59	2.56	2.55	2.55	2.55	2.55	2.55	2.55	2.55	2.55	2.55	2.55	2.55
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.61	2.57	2.54	2.53	2.53	2.53	2.53	2.53	2.53	2.53	2.53	2.53	2.53	2.53
22	4.30	3.44	3.04	2.82	2.66	2.59	2.55	2.52	2.51	2.51	2.51	2.51	2.51	2.51	2.51	2.51	2.51	2.51	2.51
23	4.28	3.42	3.02	2.80	2.64	2.57	2.53	2.50	2.49	2.49	2.49	2.49	2.49	2.49	2.49	2.49	2.49	2.49	2.49
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.55	2.51	2.48	2.47	2.47	2.47	2.47	2.47	2.47	2.47	2.47	2.47	2.47	2.47
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.53	2.49	2.46	2.45	2.45	2.45	2.45	2.45	2.45	2.45	2.45	2.45	2.45	2.45
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.58	2.51	2.47	2.44	2.43	2.43	2.43	2.43	2.43	2.43	2.43	2.43	2.43	2.43	2.43
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.56	2.49	2.45	2.42	2.41	2.41	2.41	2.41	2.41	2.41	2.41	2.41	2.41	2.41	2.41
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.54	2.47	2.43	2.40	2.39	2.39	2.39	2.39	2.39	2.39	2.39	2.39	2.39	2.39	2.39
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.52	2.45	2.41	2.38	2.37	2.37	2.37	2.37	2.37	2.37	2.37	2.37	2.37	2.37	2.37
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.50	2.43	2.39	2.36	2.35	2.35	2.35	2.35	2.35	2.35	2.35	2.35	2.35	2.35	2.35
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.42	2.35	2.31	2.28	2.27	2.27	2.27	2.27	2.27	2.27	2.27	2.27	2.27	2.27	2.27
60	4.00	3.16	2.76	2.53	2.34	2.27	2.23	2.20	2.19	2.19	2.19	2.19	2.19	2.19	2.19	2.19	2.19	2.19	2.19
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.26	2.19	2.15	2.12	2.11	2.11	2.11	2.11	2.11	2.11	2.11	2.11	2.11	2.11	2.11
$\infty$	3.84	3.00	2.60	2.37	2.18	2.11	2.07	2.04	2.03	2.03	2.03	2.03	2.03	2.03	2.03	2.03	2.03	2.03	2.03

F =  $\frac{s_1^2/s_2^2}{m/n}$ , where  $s_1^2$  and  $s_2^2$  are independent mean squares estimating a common variance  $\sigma^2$  and based on  $m$  and  $n$  degrees of freedom, respectively.