

# TENTAMEN I MATEMATISK MODELLERING INOM KEMITEKNIKEN

KAA051 (KAA050)

Onsdag 13 januari 2010 kl 08.30-13.30 i V

---

Anders Rasmuson är anträffbar för frågor på telefonankn 2940 eller 27 36 06 och kommer att vara i tentamenslokalen någon gång mellan kl 10.00 och 11.00

---

Granskning av tentamensrättningen kan ske tidigast den 2 februari 2010.

## Betygsgränser

Poäng:	0-14	15-19	20-24	25-
Betyg:	U	3	4	5

---

## Tillåtna hjälpmedel

Skrivdon och valfri räknedosa (nollställd)

TEFYMA-tabellen

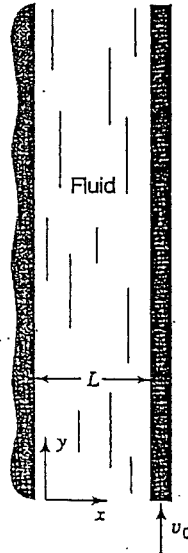
Physics Handbook

Standard Mathematical Tables

BETA Mathematics Handbook samt

Handbook of Chemistry and Physics

1. En vätska strömmar laminärt mellan två stora vertikala plattor under inflytande av en konstant tryckgradient. Ena ytan (till vänster) står stilla och den högra rör sig uppåt med hastigheten  $v_0$  (se Figur). Ställ, genom att stryka termer i den generella transportekvationen (se bilaga), upp en stationär modell för hastighetsfördelningen  $v_y(x)$ ! Motivera! (4p)

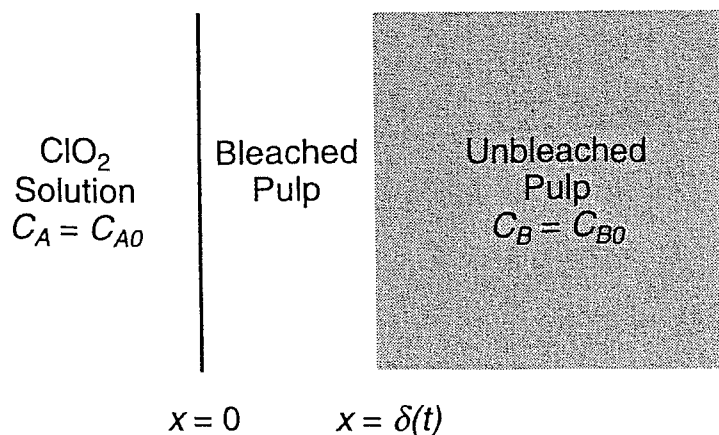


2. Klordioxid ( $ClO_2$ ) används vid blekning av vattensuspensioner av pappersmassa.  $ClO_2$  reagerar snabbt och irreversibelt med ligninet i massan, som utgör ungefär 5%; resterande del av massan (framförallt cellulosa) är inert mot  $ClO_2$ . Förutom reaktionen med lignin sker en långsam spontan sönderdelning av  $ClO_2$ .

En förenklad bild av processen visas i Figur. Gränzytan mellan  $ClO_2$ -lösning och massan ligger vid  $x=0$ , och tjockleken av denna kan antas "oändlig". Om vi antar att reaktionen mellan  $ClO_2$  och lignin är "oändligt" snabb bildas en skarp gräns mellan blekt och oblekt massa ( $x = \delta(t)$ ). Koncentrationen av  $ClO_2$  vid  $x=0$  är konstant  $C_{A0}$  och den oblekta ligninkoncentrationen är  $C_{B0}$ . Ligninet ingår i fiberstrukturen och kan därför betraktas som immobil. Antag att sönderdelningen av  $ClO_2$  sker enligt första ordningens homogen reaktion.

Ställ upp en matematisk modell för blekningsförloppet!

(6p)



### Uppgift 3

(6 poäng)

- a) CO oxideras av  $O_2$  på en platina katalysator. En möjlig reaktionshastighet för detta system är:

$$r_{CO} = \frac{k_A c_{CO} c_{O_2}}{(1 + K_{CO} c_{CO})^2}$$

$c_{CO}$  och  $c_{O_2}$  är koncentrationer. Syre finns i stort överskott. Materialbalansen för en cylindrisk reaktor beskrivs enligt.

$$\frac{\partial C_{CO}}{\partial t} + v_z \frac{\partial C_{CO}}{\partial z} + v_r \frac{\partial C_{CO}}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial C_{CO}}{\partial \theta} = D_A \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial C_{CO}}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 C_{CO}}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 C_{CO}}{\partial \theta^2} \right] - r_{CO}$$

Katalysatorytan är liten vilket gör att stationärt tillstånd inställer sig snabbt. Koncentrationen i radiell led (och även i  $\theta$ ) kan antas konstant och hastigheten i radiell led försummas. Använd valfri viktad residual för att lösa koncentrationen av CO som funktion av  $z$ . Motivera val av polynom och randvillkor. För full poäng krävs ej att ekvationerna löses, men alla ekvationer skall finnas och lösningsmetod beskrivas i detalj.

Ledning. Det kan antas att koncentrationen i utloppet är nära konstant.

- b) Beskriv på samma sätt lösningsmetoden om en annan typ av viktad residual används. (valfri, men ej samma som i a)).

#### **Uppgift 4**

(4 poäng)

Beskriv fyra olika metoder för att förenkla matematiska modeller. Varje metod skall förklaras noggrant, tex genom att ange ett exempel. Ekvationer behöver ej anges.

Uppgift 5 (7 poäng)

En undersökning av hur värmeöverföringen vid förångning inuti ett rör med en speciell ytstruktur beror av bland annat hur mycket röret lutar har genomförts. Nu söks en modell för att beskriva hur detta beroende ser ut för ett visst rör, för ett visst tryck, för ett visst ämne och för ett visst flöde. Ett första förslag är

$$h = ax(b - x)[1 + c(1 - x)^{0,6} \sin(\alpha)]^{0,38}$$

Här är  $x$  ångfraktionen,  $\alpha$  rörets lutning och  $h$  värmeöverföringskoefficienten (i  $W/(m^2 K)$ ).

Genom minimering av residualkvadratsumman  $SS = \sum (h_{\text{modell}} - h_{\text{experiment}})^2$  för de data som återfinns i tabell i uppgift 6 bestämdes parametrarna  $a$ ,  $b$ ,  $c$  och kvadratsumma mm till

a (parameter 1)	3893		
b (parameter 2)	2,07		
c (parameter 3)	0,131		
SS	$2,38 \cdot 10^5$		
$\mathbf{J}^T \mathbf{J}$	4,869	$1,244 \cdot 10^4$	-33,984
	$1,244 \cdot 10^4$	$3,205 \cdot 10^7$	$-5,197 \cdot 10^4$
	-33,984	$-5,197 \cdot 10^4$	$2,174 \cdot 10^6$
$(\mathbf{J}^T \mathbf{J})^{-1}$	26,235	-0,010	$1,667 \cdot 10^{-4}$
	-0,010	$3,984 \cdot 10^{-6}$	$-6,395 \cdot 10^{-8}$
	$1,667 \cdot 10^{-4}$	$-6,395 \cdot 10^{-8}$	$4,611 \cdot 10^{-7}$

En annan undersökning under liknande förhållanden har kommit fram till andra värden på parametrarna i modellen, nämligen  $a=5800$ ,  $b=1,55$  och  $c=0,5$ . Med "våra" försöksdata och den andra undersökningens parametrar blir residualkvadratsumman  $7,00 \cdot 10^5$ .

- Går det att säga att något/några av den andra undersökningens parametervärden skiljer sig signifikant från de "vår" undersökning kommit fram till? Använd 95%-iga individuella konfidensintervall i denna deluppgift.
- Ligger den andra undersökningens parametervärden inom ett sammansatt 95 %-igt konfidensintervall för  $a$ ,  $b$  och  $c$ ? Gör undersökningen för båda de typer av sammansatta konfidensintervall som gått igenom i kursen och beskriv kort vad som karakteriserar respektive typ av konfidensområde (dvs. på vad sätt skiljer de sig).
- Undersök korrelationen mellan parametrarna  $a$ ,  $b$  och  $c$ . Vad innebär de resulterande värdena? Illustrera gärna grafiskt.

Ledning:

Korrelationskoefficientmatrisen  $C$  beräknas enligt

$$C_{i,j} = \frac{D_{ij}}{\sqrt{D_{ii} \cdot D_{jj}}}, \text{ där } \mathbf{D} = (\mathbf{J}^T \mathbf{J})^{-1}$$

Se bilaga för övriga tabeller och formler.

Uppgift 6 (3 poäng)

I nedanstående tabell finns de värden man får i de uppmätta punkterna för modellen i uppgift 5 med optimala värden på parametrarna.

x	$\alpha$ (grader)	h uppmätt	h modell
0,26	-60	1880	1764
0,27	0	1970	1891
0,27	60	2170	1957
0,45	-60	2510	2749
0,45	0	2600	2837
0,45	60	2900	2920
0,64	-60	3670	3477
0,66	0	3720	3621
0,67	60	3620	3730

- a) Undersök på lämpligt sätt om variansen kan anses konstant.
- b) Undersök på lämpligt sätt om det finns anledning att anta att modellen i uppgift 5, med de genom kvadratsummeminimering bestämda parametrarna, kan förbättras på något sätt (utöver det som undersöktes i deluppgift a)). Av undersökningen skall framgå vad som bör förbättras (om något) och (ungefärligt, i ord) en idé om hur skall ges.

# Appendix A: Microscopic transport equations

Table A1 Microscopic transport equations in rectangular coordinates

## Mass Balance for Component A in Dilute Binary System

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} + v_x \frac{\partial c_A}{\partial x} + v_y \frac{\partial c_A}{\partial y} + v_z \frac{\partial c_A}{\partial z} = \mathcal{D}_{AB} \left( \frac{\partial^2 c_A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c_A}{\partial z^2} \right) + R_A$$

Accumulation
Transport through surface by bulk flow
Transport through surface by mass diffusion
Generation

## Mass Balance for $i^{\text{th}}$ Specie (Multicomponent)

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + v_x \frac{\partial \rho_i}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho_i}{\partial y} + v_z \frac{\partial \rho_i}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{c^2}{\rho} \sum_{j=1}^n M_i M_j \mathcal{D}_{ij} \left[ x_j \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \left( \frac{\partial \ln a_j}{\partial x_k} \right) \frac{\partial x_k}{\partial x} \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{c^2}{\rho} \sum_{j=1}^n M_i M_j \mathcal{D}_{ij} \left[ x_j \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \left( \frac{\partial \ln a_j}{\partial x_k} \right) \frac{\partial x_k}{\partial y} \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{c^2}{\rho} \sum_{j=1}^n M_i M_j \mathcal{D}_{ij} \left[ x_j \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \left( \frac{\partial \ln a_j}{\partial x_k} \right) \frac{\partial x_k}{\partial z} \right] \right\} + r_i$$

Accumulation
Transport through surface by bulk flow
Transport through surface by mass diffusion
Generation

## Mass Balance (Total)

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

Transport by bulk flow

## Momentum Balance

### x component

$$\rho \left( \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) + \rho g_x$$

Accumulation
Transport through surface by bulk flow
Transport through surface by viscous diffusion
Generation

### y component

$$\rho \left( \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) + \rho g_y$$

Accumulation
Transport through surface by bulk flow
Transport through surface by viscous diffusion
Generation

### z component

$$\rho \left( \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) + \rho g_z$$

Accumulation
Transport through surface by bulk flow
Transport through surface by viscous diffusion
Generation

## Energy Balance

$$\rho C_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + S_E$$

Accumulation
Transport through surface by bulk flow
Transport through surface by thermal diffusion
Generation

## Mechanical Energy Balance

$$\rho \left( \frac{\partial \hat{K}}{\partial t} + v_x \frac{\partial \hat{K}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \hat{K}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \hat{K}}{\partial z} \right) = - \left( v_x \frac{\partial p}{\partial x} + v_y \frac{\partial p}{\partial y} + v_z \frac{\partial p}{\partial z} \right) + \rho (v_x g_x + v_y g_y + v_z g_z) + \text{irreversible losses}$$

Accumulation
Transport through surface by bulk flow
Work
Generation (consumption)

## Bilaga till tentamen i Matematisk modellering:

The maximum likelihood estimate of the parameters  $\beta$ ,  $b$ , can be obtained as

$$\mathbf{b} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}$$

The variance can be estimated as the residual mean square:

$$s^2 = \frac{SS(\mathbf{b})}{N-P}$$

A  $1-\alpha$  joint confidence region for  $\beta$ , i.e. accounting for the simultaneous variation of all the parameters is defined by

$$SS(\beta) \leq SS(\mathbf{b}) \left[ 1 + \frac{P}{N-P} F(P, N-P, \alpha) \right]$$

which in the linear case can be proven to be the ellipsoid

$$(\beta - \mathbf{b})^T \mathbf{X}^T \mathbf{X} (\beta - \mathbf{b}) \leq P s^2 F(P, N-P, \alpha)$$

where  $F(P, N-P; \alpha)$  is the upper  $\alpha$  quantile for the F distribution with  $P$  and  $N-P$  degrees of freedom. Note also that  $SS(\mathbf{b})$  is the minimum residual sum of squares.

A  $1-\alpha$  marginal confidence interval for the parameter  $\beta_p$  is

$$b_p \pm se(b_p) t(N-P, \alpha/2)$$

where  $t(N-P; \alpha/2)$  is the upper  $\alpha/2$  quantile for the Student's  $t$ -distribution with  $N-P$  degrees of freedom and the standard error of the parameter estimator is

$$se(b_p) = s \sqrt{\left\{ (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \right\}_{pp}}$$

with  $\left\{ (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \right\}_{pp}$  equal to the  $p$ th diagonal term of the matrix  $(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}$ .

A  $1-\alpha$  confidence interval for the expected response at  $\mathbf{x}_0$  is

$$\mathbf{x}_0^T \mathbf{b} \pm s \sqrt{\mathbf{x}_0^T (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_0} t(N-P, \alpha/2)$$

A  $1-\alpha$  confidence band for the response function at any  $\mathbf{x}$  is

$$\mathbf{x}^T \mathbf{b} \pm s \sqrt{\mathbf{x}^T (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}} \sqrt{P F(P, N-P, \alpha)}$$

The linear approximation can also be used to construct approximate confidence regions for the non-linear case. We can then use the same equations as for the non-linear case by replacing  $\beta$  by  $\theta$ ,  $b$  by  $\theta^*$ ,  $\mathbf{X}$  by  $\mathbf{J}^*$ ,  $\mathbf{x}_0^T \mathbf{b}$  by  $f(\mathbf{x}_0, \theta^*)$ , and  $\mathbf{x}_0$  by

$$\mathbf{j}_0 = \left. \frac{\partial f(\mathbf{x}_0, \theta)}{\partial \theta^T} \right|_{\theta^*}$$



## PERCENTAGE POINTS, STUDENT'S *t*-DISTRIBUTION

This table gives values of *t* such that

$$F(t) = \int_{-\infty}^t \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{ns} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} dt$$

for *n*, the number of degrees of freedom, equal to 1, 2, . . . , 30, 40, 60, 120, ∞; and for *F*(*t*) = 0.60, 0.75, 0.90, 0.95, 0.975, 0.99, 0.995, and 0.9995. The *t*-distribution is symmetrical, so that *F*(-*t*) = 1 - *F*(*t*)

<i>n</i> \ <i>F</i>	.60	.75	.90	.95	.975	.99	.995	.9995
1	.325	1.000	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	636.619
2	.289	.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	31.598
3	.277	.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	12.924
4	.271	.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	8.610
5	.267	.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	6.869
6	.265	.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.959
7	.263	.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	5.408
8	.262	.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	5.041
9	.261	.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.781
10	.260	.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.587
11	.260	.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.437
12	.259	.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	4.318
13	.259	.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	4.221
14	.258	.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	4.140
15	.258	.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	4.073
16	.258	.690	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	4.015
17	.257	.689	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.965
18	.257	.688	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.922
19	.257	.688	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.883
20	.257	.687	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.850
21	.257	.686	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.819
22	.256	.686	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.792
23	.256	.685	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.767
24	.256	.685	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.745
25	.256	.684	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.725
26	.256	.684	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.707
27	.256	.684	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.690
28	.256	.683	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.674
29	.256	.683	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.659
30	.256	.683	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.646
40	.255	.681	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.551
60	.254	.679	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.460
120	.254	.677	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.373
∞	.253	.674	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.291

\* This table is abridged from the "Statistical Tables" of R. A. Fisher and Frank Yates published by Oliver & Boyd, Ltd., Edinburgh and London, 1938. It is here published with the kind permission of the authors and their publishers.

F-Distribution

PERCENTAGE POINTS, F-DISTRIBUTION (Continued)

$$F(F) = \int_0^F \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{m^n n^{\frac{m}{2}-1}}{m^{\frac{n}{2}} n^{\frac{m}{2}} 2} (1+mx)^{-\frac{m+n}{2}} dx = .95$$

m \ n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	236.5	238.9	240.5	241.9	243.9	245.9	248.0	249.1	250.1	251.1	252.2	253.3	254.3
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.41	19.43	19.45	19.46	19.46	19.47	19.48	19.49	19.50
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.68	8.66	8.65	8.64	8.63	8.63	8.63
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.98	5.91	5.86	5.83	5.82	5.81	5.80	5.79	5.79	5.79
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.63	4.60	4.59	4.58	4.57	4.57	4.57	4.57
6	5.90	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.04	4.00	3.94	3.91	3.90	3.89	3.88	3.88	3.88	3.88
7	5.59	4.74	4.36	4.13	3.97	3.85	3.78	3.73	3.68	3.64	3.58	3.53	3.50	3.49	3.48	3.47	3.47	3.47	3.47
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.56	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.23	3.20	3.19	3.18	3.17	3.17	3.17	3.17
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.31	3.25	3.19	3.15	3.07	3.01	2.97	2.96	2.95	2.94	2.94	2.94	2.94
10	4.90	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.81	2.80	2.79	2.78	2.78	2.78	2.78
11	4.81	3.98	3.60	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.86	2.79	2.72	2.68	2.67	2.66	2.65	2.65	2.65	2.65
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.76	2.69	2.62	2.58	2.57	2.56	2.55	2.55	2.55	2.55
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53	2.49	2.48	2.47	2.46	2.46	2.46	2.46
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.46	2.42	2.41	2.40	2.39	2.39	2.39	2.39
15	4.54	3.68	3.29	3.05	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40	2.36	2.35	2.34	2.33	2.33	2.33	2.33
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.35	2.31	2.30	2.29	2.28	2.28	2.28	2.28
17	4.45	3.59	3.20	2.97	2.81	2.70	2.62	2.55	2.50	2.45	2.38	2.31	2.27	2.26	2.25	2.24	2.24	2.24	2.24
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.27	2.23	2.22	2.21	2.20	2.20	2.20	2.20
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.24	2.20	2.19	2.18	2.17	2.17	2.17	2.17
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.21	2.17	2.16	2.15	2.14	2.14	2.14	2.14
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.48	2.42	2.37	2.32	2.25	2.18	2.14	2.13	2.12	2.11	2.11	2.11	2.11
22	4.30	3.44	3.04	2.81	2.65	2.54	2.45	2.39	2.34	2.29	2.22	2.15	2.11	2.10	2.09	2.08	2.08	2.08	2.08
23	4.28	3.42	3.02	2.79	2.63	2.52	2.43	2.37	2.32	2.27	2.20	2.13	2.09	2.08	2.07	2.06	2.06	2.06	2.06
24	4.26	3.40	3.01	2.77	2.61	2.50	2.41	2.35	2.30	2.25	2.18	2.11	2.07	2.06	2.05	2.04	2.04	2.04	2.04
25	4.24	3.38	2.99	2.75	2.59	2.48	2.39	2.33	2.28	2.23	2.16	2.09	2.05	2.04	2.03	2.02	2.02	2.02	2.02
26	4.21	3.36	2.97	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.26	2.21	2.14	2.07	2.03	2.02	2.01	2.00	2.00	2.00	2.00
27	4.21	3.35	2.96	2.72	2.56	2.45	2.36	2.30	2.25	2.20	2.13	2.06	2.02	2.01	2.00	1.99	1.99	1.99	1.99
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.55	2.44	2.35	2.29	2.24	2.19	2.12	2.05	2.01	2.00	1.99	1.98	1.98	1.98	1.98
29	4.18	3.33	2.94	2.70	2.54	2.43	2.34	2.28	2.23	2.18	2.11	2.04	2.00	1.99	1.98	1.97	1.97	1.97	1.97
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.22	2.17	2.10	2.03	1.99	1.98	1.97	1.96	1.96	1.96	1.96
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.19	2.14	2.09	2.02	1.95	1.91	1.90	1.89	1.88	1.88	1.88	1.88
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.26	2.17	2.11	2.06	2.01	1.94	1.87	1.83	1.82	1.81	1.80	1.80	1.80	1.80
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.76	1.69	1.65	1.64	1.63	1.62	1.62	1.62	1.62

F =  $\frac{s_1^2}{s_2^2} \cdot \frac{m}{n}$ , where  $s_1^2$  and  $s_2^2$  are independent mean squares estimating a common variance  $\sigma^2$  and based on  $m$  and  $n$  degrees of freedom, respectively.