Lösningar 2014-01-17

1. Se boken kap. 2.1

2.

$$\cancel{\text{Ack}}^{0} = \text{In} - \text{Ut} + \cancel{\text{Prod.}}^{0}$$

$$0 = -kA(x)\frac{dT}{dx}\Big|_{x} - \left(-kA(x)\frac{dT}{dx}\right)\Big|_{x+\Delta x}$$

$$- h \underbrace{S(x)}_{P(x)\Delta x}(T - T_\infty)$$

$$\Delta x \to 0 \implies$$

$$\frac{d}{dx}\left(kA(x)\frac{dT}{dx}\right) - hP(x)(T - T_\infty) = 0$$

Randvillkor

$$T(0) = T_0$$

$$-kA\frac{dT}{dx}\Big|_{x=L} = hA(T - T_\infty)$$

MMIKT Januari 2014

3. Teori fråga. Diskussion krävs.
Se kursboken kapitel 5.1.1, 5.1.2, 5.1.3, 5.1.4, 5.1.5, 5.1.6, 5.1.7, 5.1.8, 5.1.9.

---

4. FÖRE 2013.

$$2NO + 2NH_3 + 0.5O_2 \rightarrow 2N_2 + 3H_2O$$

$$r_{SCR} = k\, c_{NO}\, c_{NH_3}$$

$$2NH_3 + 1.5O_2 \rightarrow N_2 + 3H_2O$$

$$r_{NH_3 ox} = k\, c_{O_2}\, c_{NH_3}$$

a) Kollokation

$$D_{ea}\frac{d^2 c_{NH_3}}{dz^2} - v\frac{d c_{NH_3}}{dz} - 2r_{SCR} - 2r_{NH_3 ox} = 0$$

$$D_{ea}\frac{d^2 c_{NO}}{dz^2} - v\frac{d c_{NO}}{dz} - 2r_{SCR} = 0$$

$$c_{NH_3} = A + Bz + Dz^2$$

$$c_{NO} = E + Fz + Gz^2$$

$$\frac{dc_{NH_3}}{dz} = B + 2Dz \qquad \frac{d^2 c_{NH_3}}{dz^2} = 2G$$

$$\frac{dc_{NO}}{dz} = F + 2Gz \qquad \frac{d^2 c_{NO}}{dz^2} = 2G$$

$Res1 = Dea \cdot 2D - v(B + 2Dz) -$

$2 \cdot k_{SCR}(A + Bz + Dz^2)(E + Fz + Gz^2)$

$- 2k_{ox} \cdot C_{O_2} \cdot (A + Bz + Dz^2)$

$Res2 = Dea \cdot 2G - v(F + 2Gz) -$

$-2k_{SCR}(E + Fz + Gz^2)$

Kollokationspunkt $z = 0{,}5L$

$Res1(z = 0{,}5L) = 0$ (1)

$Res2(z = 0{,}5L) = 0$ (2)

R.V. $C_{NO}(z=0) = C_{NO,IN}$

$\boxed{C_{NO,IN} = E}$ (3)

R.V. $\boxed{C_{NH_3,IN} = A}$ (4)

$\left.\frac{dC_{NO}}{dz}\right|_{z=L} = 0$ $F + 2GL = 0$ $\boxed{F = -2GL}$ (5)

$\boxed{B = -2CL}$ (6)

Lös ekv. (1)–(6) $\Rightarrow C_{NO}(z)$.

b) Tex anv. fler kollokationspunkter
e större polynom

$$c_{NH_3} = A + Bz + Dz^2 + Ez^3$$

$$c_{NO} = F + Gz + Hz^2 + Iz^3$$

$$\frac{dc_{NH_3}}{dz} = B + 2Dz + 3Ez^2$$

$$\frac{d^2c_{NH_3}}{dz} = 2D + 6Ez$$

$$\frac{dc_{NO}}{dz} = G + 2Hz + 3Iz^2$$

$$\frac{d^2c_{NO}}{dz^2} = 2H + 6Iz$$

$$Res3 = Dea \cdot (2D + 6Ez) - v(B + 2Dz + 3Ez^2)$$
$$- 2k_{SCR} \cdot (A + Bz + Dz^2 + Ez^3)(F + Gz + Hz^2 + Iz^3)$$
$$- 2k_{ox}c_{O_2}(A + Bz + Dz^2 + Ez^3)$$

$$Res4 = Dea \cdot (G + 2Hz + 3Iz^2) - v(2H + 6Iz)$$
$$- 2k_{SCR} \cdot (F + Gz + Hz^2 + Iz^3)$$

2 kollokationspunkter $z_1 = 0{,}33L$ $z_2 = 0{,}67L$

$Res3(z_1 = 0{,}33L) = 0$ (7)

$Res3(z_2 = 0{,}67L) = 0$ (8)

$Res4(z_1 = 0{,}33L) = 0$ (9)

$Res4(z_2 = 0{,}67L) = 0$ (10)

R.V. $c_{NO}(z=0) = c_{NO,IN}$

$\boxed{c_{NO,IN} = F}$ (11)

$\boxed{A = c_{NO_3,IN}}$ (12)

$\left.\frac{dc_{NO}}{dz}\right|_{z=L} = 0$ $\quad G + 2HL + 3IL^2 = 0$ (13)

$B + 2DL + 3EL^2 = 0$ (14)

(7)–(14) $\Rightarrow$ $c_{NO}(z)$

c) Teorifråga. Se kapitel 5.4.4 i gamla kursboken.

Denna uppgift löses av studenter som har läst kursen i år (2013).

Uppgift 4

(5 poäng)

Lösningsförslag kan användas av eleven men är upphovsrättskyddat undervisningsmaterial och skall ej spridas, speciellt inte i elektronisk form på internet. Nedan ges kortfattat lösningsgång, referenser till kursbok samt formelsamling används för att hålla texten koncis. Eleven skall för full poäng på beräkningsuppgifter tydligt redogöra för sina beräkningar samt eventuella antaganden som behövts göras. För teoriuppgifter skall eleven ge ett tydligt svar och redogöra begreppen.

1.) Se boken kap 6.1.6.

2a-b.) Se boken kap 6.2.

Ansätt $y_1(\xi) = \theta(\xi)$

ger

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{d\xi} = y_2 \\ \dfrac{dy_2}{d\xi} = H^2 y_1 \end{cases}$$

använd randvilkoret $y_1(0) = 1$, samt itterera $y_2(0)$ så att högra randvillkoret uppfylls.

2c.) Ansätt $\theta(\xi) = a_1 + a_2\xi + a_3\xi^2$, utnyttja de 2 randvilkoren samt kollokationspunkt i exempelvis $\xi = 0.5$. Från de 3 ekvationerna, lös ut de tre obekanta koefficienter, ger approximativ lösning $\theta(\xi) = 1 - 8/11\xi + 4/11\xi^2$.

3.) Se boken kap 6.3.3.

Matematisk modellering Tentamen januari 2014 – lösningsförslag
Uppgift 5

a) Vi behöver 95%-iga individuellt konfidensintervall för θ_3 för att kunna avgöra om dess intervall innehåller värdet 0. Då gäller (från formelbladet)

$$b_p \pm \mathrm{se}(b_p)\,\mathrm{t}(\mathrm{n}-p,\alpha/2)$$

Ur uppgiftstexten fås att antal parametrar $p = 3$ och antal mätdata $n = 8$. Ur tabell fås t((8-3,0.975) = 2.5706 För att beräkna *se* så behövs en skattning av variansen

$$s^2 = \frac{SSE(\mathbf{b})}{n-p} = 4{,}82\cdot 10^{-6} \quad \Rightarrow \quad s = 0{,}0022$$

Från formelbladet

$$\mathrm{se}(b_3) = s\sqrt{\left\{(\mathbf{J}'\mathbf{J})^{-1}\right\}_{33}} = 3{,}405$$

Vilket ger att konfidensintervallet blir -9,73 ± 8,75

Svar: Parameter 3 har inte 0 inom sitt intervall, vilket innebär att den kan sägas vara signifikant.

b) Vi behöver här ett konfidensintervall för y i en given punkt. Det ges av

$$f(\mathbf{x}_0,\boldsymbol{\theta}^*) \pm s\sqrt{\mathbf{j}_0'(\mathbf{J}'\mathbf{J})^{-1}\mathbf{j}_0}\;\mathrm{t}(\mathrm{n}-p,\alpha/2)$$

där

$$\mathbf{j}_0 = \left.\frac{\partial\,\mathrm{f}(\mathbf{x}_0,\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\theta}^T}\right|_{\boldsymbol{\theta}^*}$$

Vi behöver alltså derivatan av f (dvs y) i punkten 1.

$$\frac{\partial\,\mathrm{f}(\mathbf{x}_0,\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\theta}^T} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\dfrac{1}{T/K+\theta_3} \\ \dfrac{\theta_2}{(T/K+\theta_3)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0{,}0027 \\ 0{,}018 \end{pmatrix}$$

Sätter vi in dessa värden i formeln, så erhålls gränsen 0,0070 och funktionsvärdet y beräknas med de givna parametrarna till 1,3740, dvs konfidensintervallet blir y = 1,3740 ± 0,0070. I texten finns uppmätt tryck givet, från vilket vi kan beräkna y_{exp}=ln(3,9975) = 1,3857. Övre gräns på konfidensintervallet är 1,3810, så *det uppmätta värdet ligger ej inom konfidensintervallet.*

c) Vi behöver beräkna korrelationsmatrisen enligt den i uppgiften givna formeln. Det ger för korrelationen mellan parameter 1 och 2 värdet 0,9989. Det innebär att parameter 1 och 2 är mycket starkt positivt korrelerade, dvs vi kan öka eller minska båda samtidigt utan att förklaringsgraden minskas påtagligt. Grafiskt ger detta en mycket smal och långsträckt ”konfidensellips” som ”lutar åt vänster”.

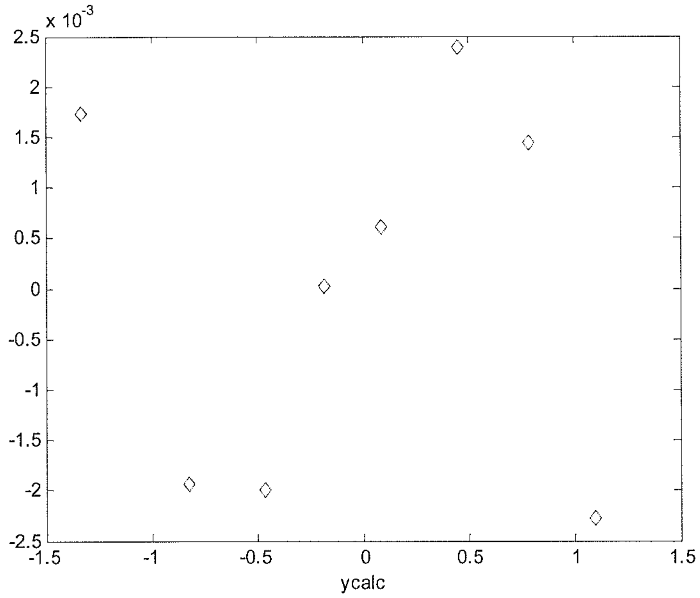
Uppgift 6

a) Eftersom vi inte har upprepade försök görs analysen bäst mha residualanalys, där vi undersöker om spridningen mellan punkter är olika för olika förhållanden. Vi väljer här en plot mot modellens beräknade värden. Vi kan också använda oss av den figur vi behöver för deluppgift b).

Vi börjar med att beräkna residualerna som skillnaden mellan y(beräknad) och y(uppmätt).

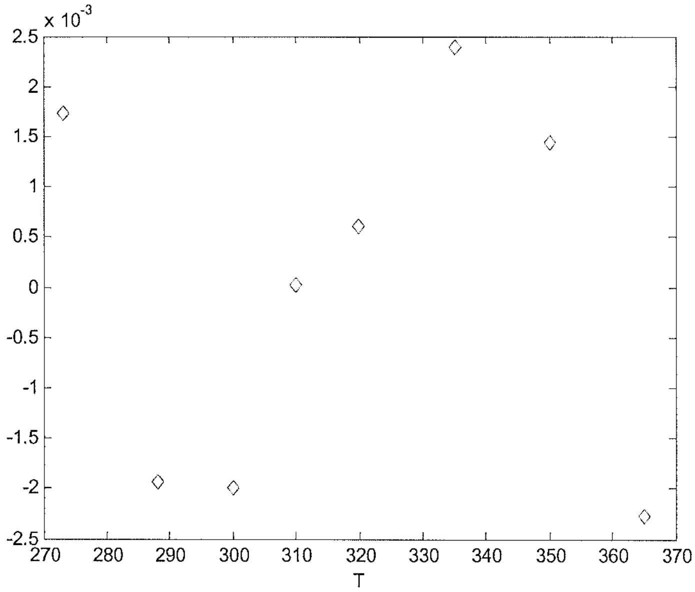
$$y_{beräknad} = \begin{pmatrix} -1,3316 \\ -0,8268 \\ -0,4643 \\ -0,1813 \\ 0,0838 \\ 0,4512 \\ 0,7859 \\ 1,0923 \end{pmatrix} \qquad y_{uppmätt} = \begin{pmatrix} -1,3333 \\ -0,8249 \\ -0,4624 \\ -0,1813 \\ 0,0832 \\ 0,4488 \\ 0,7844 \\ 1,0946 \end{pmatrix}$$

I figuren ges residualen som funktion av y(beräknad):



Av denna (och även av nedanstående) så finns det inget som tyder på att spridingen är olika i olika delområden, dvs det finns inget som antyder att vi inte har konstant varians.

b) Residualanalys är en lämplig metod för att finna om temperaturberoendet har inkluderats på ett tillräckligt bra sätt i vår modell. En plot av residualen mot temperaturen ger följande utseende:



Här har residualen inte slumpmässig utan har ett utseende som liknar en tredjegradskurva, vilket antyder att t.ex. ett tillägg av ett tredjegradspolynom i T till modellen kan vara lämpligt.