Carl-Magnus Träff Bt07

Sammanfattning av ALA-B 2007

A. Ordinära differentialekvationer (ODE)

1. Första ordningens homogena ODE

Differentialekvationen $y'+ay=0$ har den allmänna lösningen $y=C\cdot e^{-ax}$, där C är en godtycklig konstant

2. Andra ordningens homogena ODE

Differentialekvationen $y''+ay'+by=0$ har den *karakteristiska ekvationen* $r^2+ar+b=0$ med rötterna r_1 och r_2. Den allmänna lösningen till differentialekvationen är:

» $y=C_1\cdot e^{r_1x}+C_2\cdot e^{r_2x}$ om rötterna är reella och olika $(r_1\neq r_2)$

» $y=e^{r_0x}\cdot(C_1x+C_2)$ om rötterna är reella och lika $(r_1=r_2=r_0)$

» $y=e^{\alpha x}\cdot(C_1\cdot\cos\beta x+C_2\cdot\sin\beta x)$ om rötterna är icke-reella ($r=\alpha\pm\beta\cdot i$, $\beta\neq 0$).

3. Inhomogena ekvationer

Differentialekvationerna $y'+ay=f(x)$ och $y''+ay'+by=f(x)$ kallas *inhomogena* om $f(x)\neq 0$.

De löses lämpligen i tre steg:

1. Först bestäms på något sätt en partikulärlösning y_p till den givna, inhomogena ekvationen. Ofta kan man bestämma en partikulärlösning som är av samma slag som högerledet $f(x)$. Förskjutningsregeln kan användas här.
2. Därefter bestämmer man den allmänna lösningen y_h till motsvarande homogena ekvation (erhålls om $f(x)$ sätts lika med 0).
3. Den allmänna lösningen till den givna, inhomogena ekvationen är:

   $$y=y_h+y_p$$

4. Separabla variabler

Metoden med separabla variabler kan användas på differentialekvationer av typen $g(y)\cdot y'=f(x)$.

Exempel: Differentialekvationen $y'=-2xy^2$, $y\neq 0$, kan skrivas $-\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx}=2x$.

Formell lösning:

$$-\int\frac{1}{y^2}dy=\int 2x\,dx\Rightarrow\qquad \frac{1}{y}=x^2+C\Rightarrow\qquad y=\frac{1}{x^2+C}$$

5. Integrerande faktor

$y'+g(x)y$ har den integrerande faktorn $e^{G(x)}$, där $G(x)$ är en primitiv funktion till $g(x)$.

Exempel:

Lös differentialekvationen $y'+2xy = 4x$ genom att använda en integrerande faktor.

$y'+2xy = 4x$

$\Downarrow$

Integrerande faktor är e^{x^2} (notera att x^2 är en primitiv funktion till $2x$)

Multiplicera hela uttrycket med e^{x^2}:

$e^{x^2} \cdot y'+e^{x^2} \cdot 2xy = 4x \cdot e^{x^2}$

$\Downarrow$

$\frac{d}{dx}\left(e^{x^2} \cdot y\right) = 4x \cdot e^{x^2}$

$\Downarrow$

$e^{x^2} \cdot y = \int 4x \cdot e^{x^2} =$

$= 2x \cdot e^{x^2} + C$

(Dividera båda sidor med e^{x^2})

$y = 2 + Ce^{-x^2}$

<u>Svar</u>: Allmänna lösningen är $y = 2 + Ce^{-x^2}$

6. En alternativ förskjutningsregel

Exempel: Beräkna en partikulärlösning för $y''+3y'+2y = (2x+2)e^{-2x}$

Sätt: $\left[\begin{array}{l} y_p = q \cdot e^{-2x} \\ \Rightarrow y_p' = q' \cdot e^{-2x} - 2qe^{-2x} \\ \Rightarrow y_p'' = q'' \cdot e^{-2x} + 4qe^{-2x} + (-2)q' \cdot e^{-2x} - 2q' \cdot e^{-2x} = e^{-2x}(q''-4q'+4q) \end{array}\right]$

$\rightarrow y''+3y'+2y = e^{-2x}(q''-4q'+4q+3q'-6q+2q) = e^{-2x}(q''-q') = (2x+2)e^{-2x}$

$\Rightarrow q''-q' = 2x+2$

Sätt vidare: $\left[\begin{array}{l} q = Ax^2 + Bx \\ \Rightarrow q' = 2Ax + B \\ \Rightarrow q'' = 2A \end{array}\right]$

$\rightarrow 2A - 2Ax - B = 2x + 2$

$2 = -2A \Rightarrow A = -1$

$2A - B = 2$

$-2 - B = 2$

$\Rightarrow B = -4$

$\rightarrow q = -x^2 - 4x$

Detta ger att partikulärlösningen är

$y_p = -(x^2 + 4x)e^{-2x}$

B. Volymberäkningar med integraler

1. Metoden med cirkulära skivor

» Vid rotation kring y-axeln gäller:

$\Delta V = \pi \cdot x^2 \cdot \Delta y$

$\Downarrow$

$V = \pi \cdot \int x^2 dy$

Skriv om ekvationen så du har x^2 uttryckt i termer av y (och se till att gränserna gäller för y och inte för x). Sen är det bara att integrera på som vanligt (fast med avseende på y och inte x).

» Vid rotation kring x-axeln gäller:

$\Delta V = \pi \cdot y^2 \cdot \Delta x$

$\Downarrow$

$V = \pi \cdot \int y^2 dx$

Ta din givna funktion i kvadrat, integrera med avseende på x och multiplicera svaret med π.

2. Metoden med cylindriska skal

Om du till exempel ska rotera ett område kring y-axeln men har svårt att skriva om din funktion så att x^2 uttrycks i termer av y så kan du använda denna metod. Vid rotation kring y-axeln gäller:

$\Delta V \approx 2\pi \cdot x \cdot y \cdot \Delta x$

$\Downarrow$

$V \approx 2\pi \cdot \int (x \cdot y) dx$

Du tar alltså din funktion gånger x, integrerar med avseende på x och multiplicerar svaret med 2π.

C. Lite om imaginära tal

1. Några definitioner

Ett *komplext tal* kan skrivas på formen $a+bi$, där a och b är reella tal och $i^2=-1$.
Om $z=a+bi$ så gäller:

» a är *realdelen* av z	$\mathrm{Re}(z)=a$
» b är *imaginärdelen* av z	$\mathrm{Im}(z)=b$
» i är den *imaginära enheten*	$i^2=-1$
» $\lvert z\rvert$ är *absolutbeloppet* av z	$\lvert z\rvert=\sqrt{a^2+b^2}$
» $\bar{z}$ är *konjugatet* till z	$\bar{z}=a-bi$

2. Polär form

$$z=a+bi=$$
$$=r\cos(v)+r\sin(v)\cdot i=$$
$$=r(\cos(v)+i\sin(v))$$

Ett komplext tal $z=a+bi$ kan alltså skrivas $z=r(\cos(v)+i\sin(v))$, där r är *absolutbeloppet* av z och v är *argumentet* av z (vinkeln mellan z och den reella tallinjen). Vi säger då att z är skrivet i *polär form*.
Argumentet av z skrivs $\arg(z)$.

Vid multiplikation i polär form multipliceras absolutbeloppen och argumenten adderas.
Vid division i polär form divideras absolutbeloppen och argumenten subtraheras.

3. de Moivres formel

$(\cos(v)+i\sin(v))^n=\cos(nv)+i\sin(nv)$, där n är ett naturligt tal.

4. Eulers formel

Om x och y är reella tal gäller:

$$e^{iy}=\cos(y)+i\sin(y)$$
$$e^{z}=e^{x+iy}=e^{x}\cdot e^{iy}=e^{x}(\cos(y)+i\sin(y))$$

Exempel:

$$e^{3\pi\cdot i/4}=\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i$$
$$e^{2+3i}=e^{2}\cdot e^{3i}=e^{2}(\cos(3)+i\sin(3))=e^{2}\cos(3)+i\cdot e^{2}\sin(3)\approx-7{,}32+1{,}04i$$

Exempel:

$(e^{iy})^n=e^{iny}$ är en kompakt form av de Moivres formel.

D. Allmänt gällande integrering

1. Polynomdivision och partialbråksuppdelning (PBU)

Exempel: Om vi ska integrera ett krångligt uttryck som

$\int \frac{x+13}{x^3+x^2-4x-4}$ vill vi gärna förenkla det först.

Detta kan vi göra genom att först dela upp nämnaren i faktorer genom polynomdivision och sedan dela upp uttrycket med hjälp av partialbråksuppdelning.

För att hitta vår första faktor behöver vi finna en rot till $nämnaren = 0$, alltså $x^3+x^2-4x-4=0$. Vi ser att en rot är $x=-1$, och en faktor är då $(x+1)$.

Den andra faktorn fås via polynomdivision:

$$
\begin{array}{l}
\phantom{x^3+{}}x^2-4 \\
\hline
x^3+x^2-4x-4 \;\big|\; \underline{x+1} \\
\underline{-\left(x^3+x^2\right)} \\
-4x-4 \\
\underline{-\left(-4x-4\right)} \\
0
\end{array}
$$

Vi har alltså:

$$\frac{x+13}{x^3+x^2-4x-4}=\frac{x+13}{(x+1)(x^2-4)}$$

Nu ska vi partialbråksuppdela.

$\frac{x+13}{(x+1)(x^2-4)}$ kan skrivas på formen $\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-4}$. Vi ska finna A, B och C.

$$\frac{x+13}{(x+1)(x^2-4)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-4}$$

$\Downarrow$

$$x+13=A(x^2-4)+(Bx+C)(x+1)=$$

$$=Ax^2-4A+Bx^2+Bx+Cx+C=$$

$$=(A+B)x^2+(B+C)x+(C-4A)$$

Vi har:

$A+B=0 \qquad B+C=1 \qquad C-4A=13$

Detta löser vi med en utökad koefficientmatris:

$$
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & 1 & 13 \end{array}\right] \sim
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 13 \end{array}\right] \sim
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 9 \end{array}\right]
$$

$C=-3 \qquad B=4 \qquad A=-4$

Vi har då:

$$\int \frac{x+13}{x^3+x^2-4x-4}=\int \frac{x+13}{(x+1)(x^2-4)}=\int \frac{4x-3}{x^2-4}-\frac{4}{x+1}$$

$\dfrac{4x-3}{x^2-4}$ kan förenklas ytterligare med PBU genom att faktorisera nämnaren till $(x+2)(x-2)$.

2. Variabelsubstitution

Om vi har en integral på formen $\int_a^b f(g(x))g'(x)dx$ kan vi förenkla den genom att omvandla den till $\int_A^B f(u)du$.

Exempel:
Beräkna integralen

$$I=\int_0^{\pi}\left(2+\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2\cos\left(\frac{x}{2}\right)dx=$$

$$=\begin{bmatrix} v=2+\sin\left(\frac{x}{2}\right) & 0\to 2 \\ dv=\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)dx & \pi\to 3 \end{bmatrix}=$$

$$=2\int_2^3 v^2dv=\left[\frac{2}{3}v^3\right]_2^3=\frac{2}{3}(27-8)=\frac{38}{3}\,areaenheter$$

3. Invers substitution

Ibland blir beräkningarna enklare om man genomför en invers substitution, alltså så att integralen $\int_a^b f(x)dx$ omvandlas till $\int_{x=a}^{x=b} f(g(u))g'(u)du$.

Exempel:
Beräkna volymen:

$$V=2\pi\int_1^2\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx=$$

$$=\begin{bmatrix} x=2\sin(t) & 1\to\frac{\pi}{6} \\ dx=2\cos(t)dt & 2\to\frac{\pi}{2} \\ 4-x^2=4-4\sin^2(t)=4(1-\sin^2(t))=4\cos^2(t) & \end{bmatrix}=$$

$$=2\pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos(t)}{\sqrt{4\cos^2(t)}}dt=2\pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}1dt=$$

$$=2\pi\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=2\pi\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{2\pi^2}{3}\,volymsenheter$$

4. Partialintegrering

Ett samband som ibland gör beräkningarna enklare är $\int U dV = UV - \int V dU$

Exempel:

Beräkna integralen $I = \int_1^e x^2 \ln(x)\,dx$

Vi partialintegrerar:

$$\int_1^e x^2 \ln(x)\,dx =$$

$$= \begin{bmatrix} U = \ln(x) & dV = x^2 dx \\ dU = \frac{1}{x}dx & V = \frac{x^3}{3} \end{bmatrix} =$$

$$= (U(e) \cdot V(e)) - (U(1) \cdot V(1)) - \int_1^e V dU =$$

$$= \left(\ln(e)\frac{e^3}{3} - \ln(1)\frac{1}{3}\right) - \int_1^e \frac{x^2}{3} dx =$$

$$= \frac{e^3}{3} - \left[\frac{x^3}{9}\right]_1^e =$$

$$= \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9} =$$

$$= \frac{2e^3}{9} + \frac{1}{9} =$$

$$= \frac{1}{9}(2e^3 + 1)\,areaenheter$$

5. Generaliserade integraler

Om f är kontinuerlig på intervallet $[a, \infty)$ definierar vi den generaliserade integralen av f på $[a, \infty)$ som ett gränsvärde av vanliga integraler:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{R \to \infty} \int_a^R f(x)\,dx$$

Likadant om f är kontinuerlig på $(-\infty, a]$:

$$\int_{-\infty}^a f(x)\,dx = \lim_{R \to -\infty} \int_R^a f(x)\,dx$$

Om gränsvärdet existerar säger vi att integralen är konvergent, om det inte existerar säger vi att den är divergent (och divergerar antingen mot ∞ eller $-\infty$).

Om f är kontinuerlig på $(a, b]$ har vi:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)\,dx$$

Om f är kontinuerlig på $[a, b)$ har vi:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\,dx$$

Kruxet här är alltså att se om integralen konvergerar och i så fall till vilket gränsvärde. Till exempel är $\lim_{x \to \infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$ eftersom $\tan(x) \to \infty$ då $x \to \frac{\pi}{2}$, jämför grafen till arctangens med grafen för tangens.

E. Lite om linjär algebra

1. Linjära ekvationssystem och utökade koefficientmatriser

Ett *linjärt ekvationssystem* av typen

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_2 - 8x_3 &= 8 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 &= -9 \end{aligned}$$

har antingen en, ingen eller oändligt många lösningar.
Systemet kan lösas genom att man omvandlar det till en *utökad koefficientmatris* och reducerar matrisen med *Gausselimination* så vi lätt får fram vad x_1, x_2 och x_3 är.
I detta fall:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & -9 & -9 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 29 \\ x_2 = 16 \\ x_3 = 3 \end{array}$$

Systemet hade inte haft några lösningar om den reducerade matrisen hade varit på formen:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} * & 0 & 0 & * \\ 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{array}\right]$$

Det hade haft oändligt många lösningar om det hade varit på formen:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} * & 0 & 0 & * \\ 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Dessa lösningar hade haft formen:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * \\ * \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} * \\ * \\ * \end{bmatrix} \text{ där t är en fri variabel, } t \in \Re^3$$

2. Trappstegsform och reducerad trappstegsform

En matris på trappstegsform har formen:

$$\begin{bmatrix} 0 & \# & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \# & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \# & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \# & * \end{bmatrix}$$

Där $\#$ kan vara vilket nollskilt tal som helst. $\#$ kallas pivotelement och kolumnen där den står kallas pivotkolumn.
En matris på radreducerad trappstegsform har formen:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & * & 0 & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \end{bmatrix}$$

Dvs. varje pivotelement har reducerats till en etta och alla tal ovanför ett pivotelement är noll.

3. Linjärkombination och kort förklaring till Span(*)

Om vektorn $\bar{b}$ kan fås genom skalärmultiplikation och vektoraddition av vektorerna $\bar{a}_1$ och $\bar{a}_2$ så är $\bar{b}$ en linjärkombination av $\bar{a}_1$ och $\bar{a}_2$. Alltså existerar det skalärer (tal) x_1 och x_2 sådana att:

$x_1\bar{a}_1 + x_2\bar{a}_2 = \bar{b}$

Därmed har också ekvationen $A\bar{x} = \bar{b}$ en lösning för $A = [\bar{a}_1 \quad \bar{a}_2]$

Låt $\bar{u}$ och $\bar{v}$ vara vektorer i $\Re^3$ skilda från nollvektorn. I så fall är $Span\{\bar{v}\}$ en linje genom origo uppspänd av $\bar{v}$ och $Span\{\bar{u}, \quad \bar{v}\}$ är ett plan genom origo uppspänt av $\bar{u}$ och $\bar{v}$.

4. Ekvationen $A\bar{x} = \bar{b}$

Lösningar till ekvationen $A\bar{x} = \bar{b}$ fås genom att radreducera den utökade matrisen $[A\bar{b}]$ till trappstegsform där man lätt ser värdet på $x_1, x_2, ...x_n$:

$[A\bar{b}] \sim [I\bar{d}]$

eller genom att multiplicera $\bar{b}$ med inversen till A:

$A^{-1}\bar{b} = \bar{x}$

Om lösningarna hade haft formen:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * \\ * \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} * \\ * \\ * \end{bmatrix}$$ där t är en fri variabel, $t \in \Re^3$

Så hade vektorerna i A varit linjärt beroende (eftersom svaret till ekvationen beror på en fri variabel t). Om alla kolonner i A istället hade varit pivotkolonner hade kolonnerna i A sagts vara linjärt oberoende.

5. Underrum

Ett *underrum* till $\Re^n$ är en mängd H i $\Re^n$ som har dessa egenskaper:
a, H innehåller nollvektorn
b, För alla vektorer $\bar{u}$ och $\bar{v}$ i H gäller att summan $\bar{u} + \bar{v}$ ligger i H
c, För varje vektor $\bar{u}$ i H och varje skalär c gäller att vektorn c$\bar{u}$ ligger i H
En *bas* för ett underrum H till $\Re^n$ är varje linjärt oberoende mängd i H som spänner upp H.
Dimensionen för ett underrum H, $\dim(H)$, är lika med antalet basvektorer i en bas för H.

Kolonnrummet för en matris A är mängden $Col(A)$ av alla linjärkombinationer av kolonnerna i A. Pivotkolumnerna i A bildar en bas till kolonnrummet av A.
Nollrummet för en matris A är mängden $Nul(A)$ av alla lösningar till den homogena ekvationen $A\bar{x} = \bar{0}$.
Rangen för en matris A, $rang(A)$, är lika med dimensionen av kolonnrummet till A.
Så om matrisen A har n kolumner så har vi att:

$rang(A) + \dim(Nul(A)) = n$

Exempel:
Bestäm en bas för nollrummet och kolonnrummet för

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Vi gör detta genom att:
1. Lösa ekvationen $A\bar{x} = \bar{0}$
2. Bestämma alla pivotkolonner

<u>Metod:</u>
Bestäm (reducerad) trappstegsform för A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 13 & 1 \\ 0 & 1 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{De tre första kolonnerna i A är pivotkolonner}$$

$$\Rightarrow A\bar{x} = \bar{0} \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} x_1 & & 13x_3 & +x_4 & = 0 \\ & x_2 & -7x_3 & & = 0 \\ & & 11x_3 & +x_4 & = 0 \end{matrix} \right\}$$

$x_4 = t$ är fri variabel $\quad x_3 = -t \quad x_2 = -7t \quad x_1 = 2t$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},\ t \in \Re$$

<u>Svar:</u> En bas för $Nul(A)$ är $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

En bas för $Col(A)$ är $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$

$$\dim(Nul(A)) = 1$$
$$\underline{\dim(Col(A)) = 3} = rang(A)$$
$$+4 = \#kolonner$$

6. Matrismultiplikation

Vid multiplikation av matriser måste antalet kolonner i den första matrisen vara lika med antalet rader i den andra matrisen. Om vi har en matris A av storlek $m \times n$ och en matris B av storlek $n \times p$ så kan vi multiplicera dem i ordningen AB $(m \times n \cdot n \times p)$. Den nya matrisen kommer ha storleken $m \times p$. Vi kan dock inte multiplicera dem i ordningen BA eftersom den första matrisen då kommer ha p stycken kolonner medan den andra kommer ha m stycken rader.

Exempel:

$$A=\begin{bmatrix}3 & -1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow (4\times 4) \qquad B=\begin{bmatrix}9 & 13\\ -7 & -6\\ -7 & -8\\ 16 & 22\end{bmatrix}\Rightarrow (4\times 2)$$

$$AB=\begin{bmatrix}3 & -1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}9 & 13\\ -7 & -6\\ -7 & -8\\ 16 & 22\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(27+7-32) & (39+6-44)\\ (-7+7) & (-6+8)\\ (-9-7+16) & (-13-8+22)\\ (-9+16) & (-13+22)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\\ 0 & 1\\ 7 & 9\end{bmatrix}\Rightarrow (4\times 2)$$

7. Linjär transformation

Om T är en *linjär tranformation* som omvandlar vektorer $\Re^n \to \Re^m$ så gäller att:
$T(\bar{u}+\bar{v})=T(\bar{u})+T(\bar{v})$ där $\bar{u}$ och $\bar{v}$ är vektorer i $\Re^n$ samt för skalären c:
$T(c\bar{u})=cT(\bar{u})$
Då finns det en matris A ($m\times n$) sådan att:
$T(\bar{x})=A\bar{x}$ för alla $\bar{x}$ i $\Re^n$.
T utför alltså $\bar{x}\to A\bar{x}$ och A kallas *standardmatrisen för T* och

$$A=[T(e_1).....T(e_n)], \text{ där } e=enehetsvektor \text{ t.ex.: } e_1=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ \downarrow\\ 0\end{bmatrix}\leftarrow längd=n$$

8. Inversen till matriser

En kvadratisk matris A (av storlek $n\times n$) som är radekvivalent med identitetsmatrisen I av samma storlek har en invers A^{-1} sådan att:

$$AA^{-1}=I \qquad A^{-1}A=I$$

» För matriser större än 2×2 fås inversen genom sambandet:

$$[A\;I]\sim[I\;A^{-1}]$$

» För en 2×2 -matris gäller:

$$A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}=\frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$$

» Observera att $A\bar{x}=\bar{b}$ kan lösas genom $A^{-1}\bar{b}=\bar{x}$

9. Determinanter

Determinanten för en matris A betecknas $\det(A)$ och skrivs:

$$A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\Rightarrow \det(A)=\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}$$

För en 2×2 -matris gäller:
$\det(A)=ad-bc$ om A är samma matris som ovan.
För en 3×3-matris kan determinanten beräknas med *Sarrus regel* (se bok/anteckningar).

För större matriser fås determinanten via att man radreducerad matrisen till trappstegsform, och determinanten är lika med produkten av elementen i diagonalen.

När man radreducerar måste man dock ta hänsyn till dessa räkneregler:
a, Om en multipel av en rad i A adderas till en annan rad så matrisen B fås, så är $\det(B) = \det(A)$.
b, Om två rader i A byter plats för att bilda B, så är $\det(B) = -\det(A)$
c, Om en rad i A multipliceras med *k* för att få B, gäller att $\det(B) = k \cdot \det(A)$

10. Matrisekvationer

Exempel: Vi har XA=B+2X där vi ska beräkna den okända matrisen X.

$$XA = B + 2X$$
$$\Rightarrow XA - X \cdot 2I = B$$
$$\Rightarrow X(A - 2I) = B$$
$$\Rightarrow X(A - 2I)(A - 2I)^{-1} = B \cdot (A - 2I)^{-1}$$
$$\Rightarrow X = B \cdot (A - 2I)^{-1}$$

Sen är det bara att räkna på.

Exempel: Vi har AX=B+CX där vi ska beräkna den okända matrisen X.

$$AX = B + CX$$
$$\Rightarrow AX - CX = B$$
$$\Rightarrow (A - C)X = B$$
$$\Rightarrow X = (A - C)^{-1}B$$

Sen är det bara att räkna på.