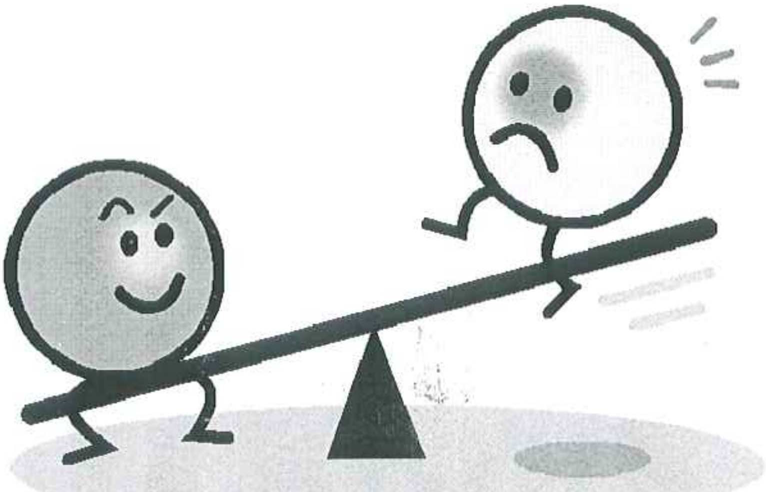
Studienämnden Kf / Kb

Mekanik

Föreläsningsanteckningar



Av: Patrik "Putte" Andersson kf-06

1. 2 Grundläggande begrepp

- Mekaniken behandlar matriella kroppar i rummet.
- Dynamik behandlar ett system med avseende på tiden
- En matriell kropp är bland annat karraktäriserad av sin massa, vilket är ett mått på dess tyngd samt tröghet
- Växelverkan mellan 2 kroppar beskrivs av krafter
- En stel kropp medför att avståndet mellan två materialpunkter är konstant

1. 3 Skalärer o vektorer

- En skalär karraktäriseras av sin storlek
- En vektor karraktäriseras av sin storlek samt riktning
- I ett cartesiskt koordinatsystem införs enhetsvektorerna , $\vec{V} = V_x \hat{i} + V_y \hat{j} + V_z \hat{k}$

1.4 Newtons lagar

En partikel kvarstår i ett tillstånd av likformig rörelse om den ej påverkas av yttre krafter

En kropp med massan m påverkas av en kraft $\vec{F}$ och har accelerationen $\vec{a}$ enligt sambandet $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$

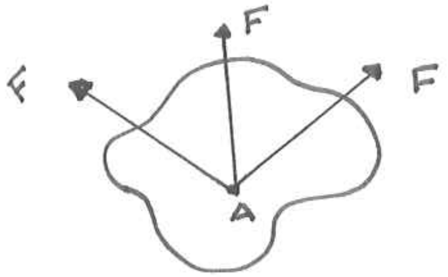
Om en kraft som verkar på en kropp A beror av en växelverkan med en kropp B gäller att B påverkas av kraften $-\vec{F}$

1.6 Kraftsystem

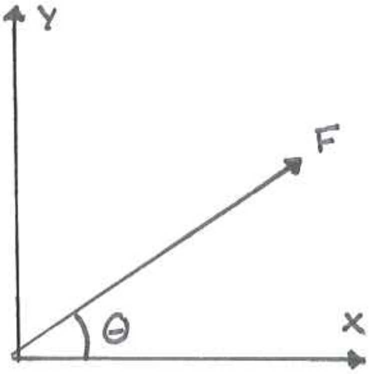
Påverkan på en kropp A av kropp B beskrivs av en kraft. En beskrivning av denna är en vektor med en angreppspunkt
Om kroppen är stel räcker det att betrakta kraften som en vektor med verkningslinje

Verkliga krafters angreppspunkt är i allmänhet utspridd över ett ändligt område. Ofta approximeras detta med en punktkraft

Om 2 krafter $\vec{F}_1$ o $\vec{F}_2$ angriper en kropp så att deras verkningslinjer korsas i en punkt A. Kan vektorerna flyttas till A o ersätta dem med en resultant



2.3 2-dimensionella kraftsystem



$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y$

$\vec{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j}$

$F_x = F \cos \theta$

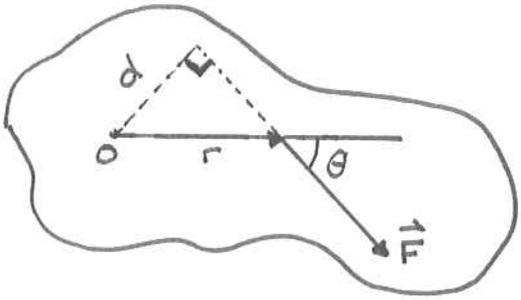
$F_y = F \sin \theta$

$F = (F_x^2 + F_y^2)^{1/2}$

$\theta = \arctan \frac{F_y}{F_x}$

2.4 Vridmoment

En kraft $\vec{F}$ som påverkar en kropp tenderar inte att bara accelerera den i kraftens riktning, utan även ge den en vinkelacceleration runt en axel vinkelrät mot kroppen



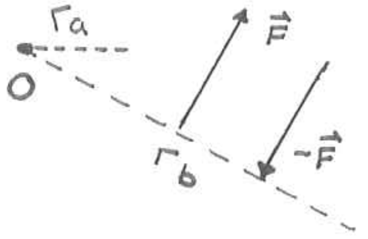
Detta beskrives av vridmomentet $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ där $\vec{r}$ är vektorn från O till någon punkt längs kraftens verkningslinje.

$\vec{M}$ har storleken $M = F \cdot d = F \cdot r \cdot \sin\theta$

$\vec{M}$ är en vektor vinkelrät mot kroppen

2.5 Kraftpar

Består av 2 motsatta krafter $\vec{F}$ o $-\vec{F}$ med skilda men parallella verkningslinjer



Krafternas summa är noll men utövar ett vridmoment $\vec{M}$ med avseende på en godtycklig punkt O

Momentet $\vec{M}$ kan ses som en fri vektor med storleken $M = F \cdot d$

En given kraft $\vec{F_1}$ med verkningslinje kan ersättas med en kraft $\vec{F_2}$ med en annan verkningslinje plus ett kraftpar med vridmoment $M = F \cdot d$ där d är avståndet mellan de två verkningslinjerna

2.6 Resultanter

Ett givet system av krafter $\vec{F}_1 \ldots \vec{F}_n$ med verkningslinjer kan ersättas med resultanten $\vec{R} = \vec{F}_1 + \ldots + \vec{F}_n$ vars verkningslinje bestäms av det ursprungliga kraftsystemet º resultanten skall ha samma vridmoment med avseende på en godtycklig punkt O. Alternativt kan man flytta alla angreppspunkter till någon godtycklig punkt O genom att införa kraftpar med vridmoment $M_1 \ldots M_n$.
Då erhålls en resultant $\vec{R}$ som angriper i punkten O samt ett totalt kraftpar med vridmoment $M = M_1 + \ldots + M_n$

3.1 Jämvikt

En kropp som påverkas av en resulterande kraft $\vec{R}$ samt ett vridmoment $\vec{M}$ är i jämvikt om º endast om $\vec{R}=0$ º $\vec{M}=0$

3.2 Jämvikt i 2-dimensionella system

För att kunna tillämpa jämviktsekvationen måste man bestämma vilken kropp man betraktar, samt vilka krafter º vridmoment som skall ingå i $\vec{R}$ respektive $\vec{M}$.
De erhålls genom att rita en figur där kroppen i fråga har isolerats från alla andra övriga kroppar º alla krafter º vridmoment som verkar på kroppen har markerats

⇒ Friläggning

Friläggning

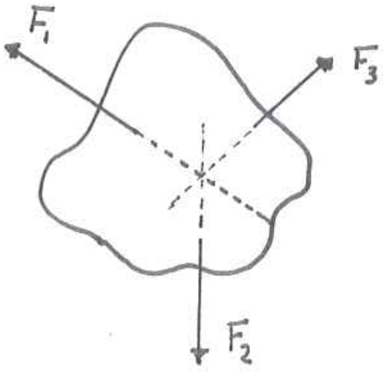
- Definera den delkropp som skall ingå
- Rita diagram respektive figur där denna delkropp har isolerats från övriga kroppar
- Markera alla krafter samt vridmoment som verkar på den frilagda kroppen
- Inför variabler för kända o̲ okända krafter
- Rita in koordinataxlar o̲ markera relevanta mått

3.3 Jämviktsvillkor

$R_x = 0 \quad R_y = 0 \quad \vec{M} = 0$

Om en kropp påverkas av 2 krafter, måste dessa vara motsatta o̲ ha samma verkningslinje

Om en kropp påverkas av tre krafter måste deras summa vara noll o̲ deras måste skäras i en punkt

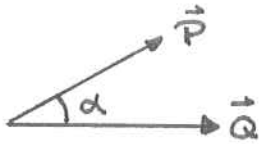


Procedur för problemlösning

- Klargör vilka storheter som är kända och vilka som söks
- Dela upp i delkroppar och frilägg
- Inför koordinatsystem och välj momentpunkt
- Ställ upp jämviktsekvationen
- Jämför obekanta med antal ekvationer
- Lös ekvationen och kontrollera rimlighet

Skalärprodukten av två vektorer

$$\vec{P}\cdot\vec{Q} = P\cdot Q\cdot\cos\alpha$$



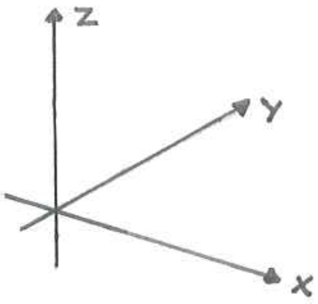
Om $\vec{P}$ är en godtycklig vektor och $\hat{n}$ är en enhetsvektor i godtycklig riktning, så är $\vec{P}\cdot\hat{n}$ storleken av projektionen av $\vec{P}$ i riktningen $\hat{n}$

Kryssprodukten av två vektorer

$\vec{P}\times\vec{Q}$ är en vektor som är ortogonal mot både $\vec{P}$ och $\vec{Q}$. Vektorerna $\vec{P}$ och $\vec{Q}$ bildar ett högerhandssystem. I cartesiska koordinatsystem används determinantmetoden

$$\vec{P}\times\vec{Q} \qquad \begin{matrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{matrix} \qquad \begin{matrix} (P_yQ_z - Q_yP_z)\,\hat{i} \\ (P_zQ_x - Q_zP_x)\,\hat{j} \\ (P_xQ_y - Q_xP_y)\,\hat{k} \end{matrix}$$

2.7 Tredimensionella kraftsystem

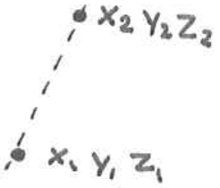


$$\vec{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k}$$

$$\vec{F} = F(\cos\theta_x\hat{i} + \cos\theta_y\hat{j} + \cos\theta_z\hat{k})$$

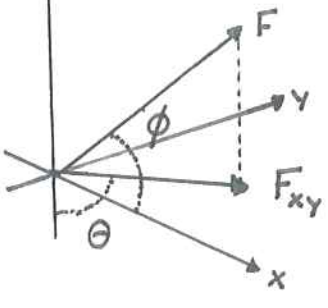
En vektors riktning kan beskrivas huvudsakligen på två sätt

- Ange två punkter på dess verkningslinje



$$\Rightarrow \quad \frac{(x_2-x_1)\hat{i}+(y_2-y_1)\hat{j}+(z_2-z_1)k}{((x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2)^{1/2}}$$

- Ange två vinklar. Vanligtvis sfäriska, polära koordinater



$$\vec{F}_z = \vec{F}\cdot\sin\phi$$

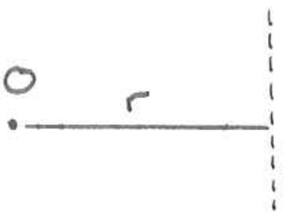
$$\vec{F}_{xy} = \vec{F}\cos\phi$$

$$\vec{F}_x = \vec{F}\cos\phi\cos\theta$$

$$\vec{F}_y = \vec{F}\cos\phi\sin\theta$$

2.8 Vridmoment och kraftpar i 3 dimensioner

En kraft $\vec{F}$ med någon verkningslinje, utövar ett vridmoment på en godtycklig punkt O



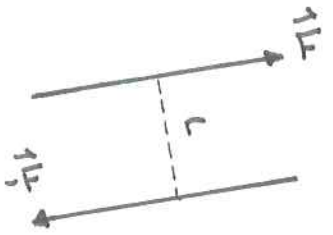
$$\vec{M}_o = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$M_o = F \cdot d$$

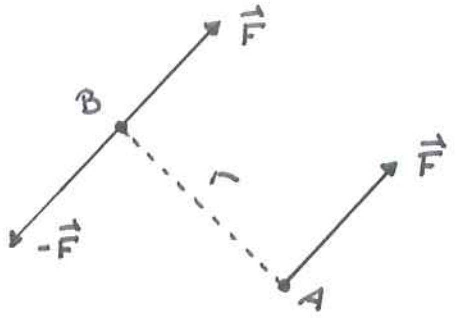
$$\vec{r} = r_x \hat{i} + r_y \hat{j} + r_z \hat{k}$$
$$\vec{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k}$$
$$\Rightarrow \quad \vec{M} = M_x \hat{i} + M_y \hat{j} + M_z \hat{k}$$
$$M_x = r_y F_z - F_y r_z$$
$$M_y = r_z F_x - F_z r_x$$
$$M_z = r_x F_y - F_x r_y$$

Kraftpar

Två motsatta krafter $\vec{F}$ & $-\vec{F}$ bildar ett kraftpar med vridmomentet $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ där $\vec{r}$ förbinder två godtyckliga punkter på verkningslinjerna



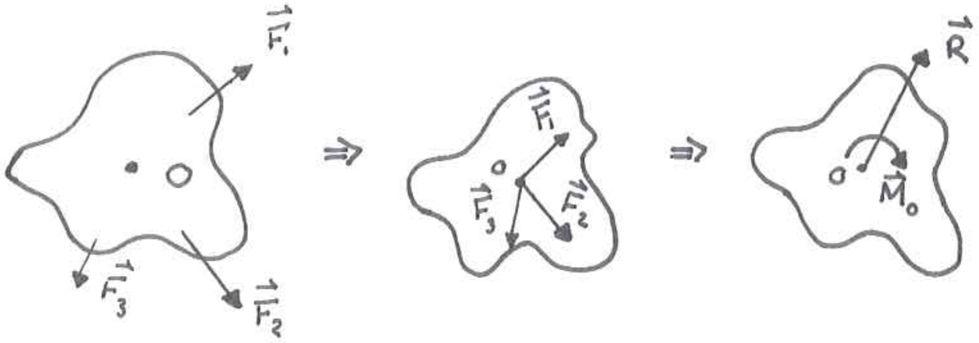
Angreppspunkten för en kraft $\vec{F}$ kan flyttas från A till B



$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Resultanter i 3 dimensioner

Ett givet system av krafter $\vec{F}_1 \ldots \vec{F}_n$ kan ersättas med en resulterande kraft $\vec{R}$ som angriper i en punkt O samt ett vridmoment $\vec{M} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \ldots + \vec{r}_n \times \vec{F}_n$



3.4 Jämvikt i 3 dimensioner

Jämviktsvillkor : summan av alla krafter = 0

summan av alla vridmoment = 0

$R_x = 0$ $M_{ox} = 0$

$R_y = 0$ $M_{oy} = 0$

$R_z = 0$ $M_{oz} = 0$

Friläggning sker på samma sätt som i 2 dimensioner. Rita 2 projektioner, till exempel en på xy-planet där inga krafter i z-led ritas ut, samt en på xz-planet där inga krafter i y-led ritas ut.

5.1 Utbredda krafter

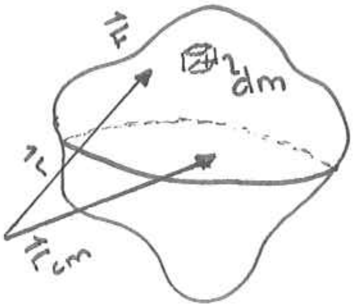
Krafter som angriper över ändligt område approximeras ofta med punktkrafter
Utbredd kraft fås genom integration av punktkrafter

- Enhet för en 1-dimensionell kraftfördelning är Nm^{-1}
- En kraft som är fördelad över en yta ger upphov till ett tryck eller spänning där enheten är Nm^{-2} = Pascal
- Den mest kända kraften i 3 dimensioner är gravitationen med enheten Nm^{-3}

5.2 Masscentrum

En kropp kan betraktas som om den är uppbyggd av infinitesimala masselement

Kroppens totala massa : $m = \int dm = \int \rho(\vec{r})\, dV$



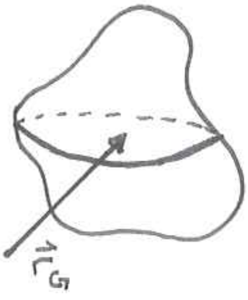
läget för masscentrum

$$\vec{r} = \frac{1}{m} \int \vec{r}\, dm$$

$$\vec{r} = \frac{1}{m} \int (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})\, \rho(x\,y\,z)\, dV$$

Ett masselement som angrips av en tyngdkraft $dW = g\,dm$

Den totala tyngdkraften $W = g \cdot m$ angriper i kroppens tyngdpunkt



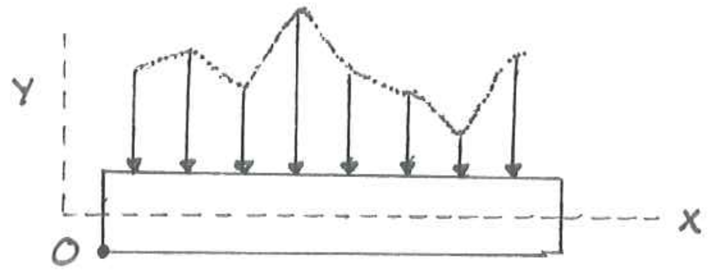
$$\vec{r}_G = \frac{1}{W} \int \vec{r}\, g\, dm$$

$$\vec{r}_G = \frac{1}{W} \int \vec{r}\, g\, \rho(\vec{r})\, dV$$

Masscentrum och tyngdpunkt är ofta samma punkt, men inte alltid

5.6 Balkar - externa krafter

Allmänt beskrivs den yttre lasten på en balk med en kraftfördelning

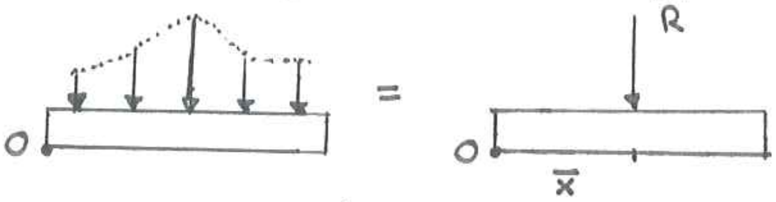


Antag att balken är horisontell º W(x) beskriver den vertikala delen av belastningen. Den totala kraften $\vec{R}$ fås genom integration

$$\vec{R} = \int W(x)\,dx$$

Belastningen kommer ge upphov till ett vridmoment med avseende på O

$$\overset{+}{\curvearrowright} M_0 = \int_0^L x\,W(x)\,dx$$



$$R\,\bar{x} = M_0 = \int x\,W(x)\,dx$$

$$\bar{x} = \frac{1}{R}\int_0^L x\,W(x)\,dx = \frac{\int_0^L x\,W(x)\,dx}{\int_0^L W(x)\,dx}$$

5.9 Fluidstatik

En fluid kan inte uppta någon skjuvkraft utan bara tryckkraft. Trycket i en viss punkt är samma i alla riktningar

⇒ Pascals lag

En fluid i vila är trycket enbart beroende av djupet. Gravitationen verkar enligt $F = \rho g \, dA\,dh$ där $dA\,dh$ = volymen. Jämviktsvillkor i vertikal led ⇒ $p\,dA + \rho g\, dA\,dh = (p + dp)\,dA$

$\rho g\, dh = dp$

Om densiteten är konstant (inkompressibel)

$$\Rightarrow \frac{dP}{dh} = \rho g \Rightarrow P = \rho g h + P_0$$

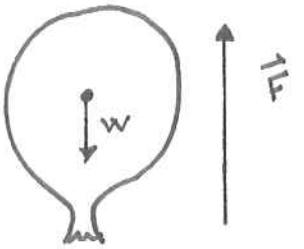
Arkimedes princip

En kropp nedsänkt i en vätska (fluid) påverkas av en lyftkraft $\vec{F}$ som är lika stor som den undanträngda vätskevolymens tyngdkraft

$F = \rho g V$

Verkningslinjen går genom den undanträngda vätskans tyngdpunkt

Hur många heliumballonger krävs för att lyfta en person?



$W = \rho g V$

$F = \rho_{luft} g V$

Antag att ballongernas o snörenas massa kan försummas.

Ballongens lyftkraft : $F_L = F - W = (\rho_{luft} - \rho) g V$

$$\left.\begin{array}{l} \rho_{luft} \approx 1.293 \text{ kg}/\text{m}^3 \\ \rho \approx 0.178 \text{ kg}/\text{m}^3 \end{array}\right\} \Rightarrow F_L \approx 10.9 \text{N}$$

Antag att personens tyngdkraft = 1000 N $\Rightarrow$ ungefär 100 m^3 heliumballonger. Om varje ballong har volymen 5 liter $\Rightarrow$

ca 20'000 ballonger

6.1 Friktion

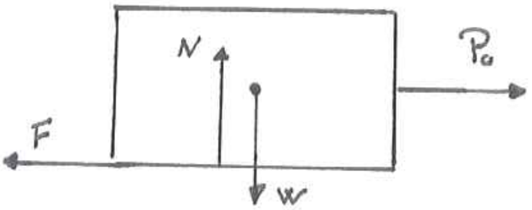
En kropp som är i kontakt med en yta, påverkas inte bara av en normalkraft, utan även av en friktionskraft som är tangentiellt riktad så att den motverkar kroppens tendens att röra sig längs kontaktytan

Typer av friktion

- Torr friktion – Uppstår mellan två torra ytor
  Beror på ojämnheter i kontaktytorna
- Friktion i fluider – Beror på fluidens viskositet
- Inre friktion – Uppstår vid en plastisk deformation
  av en kropp

6.3 Torr friktion

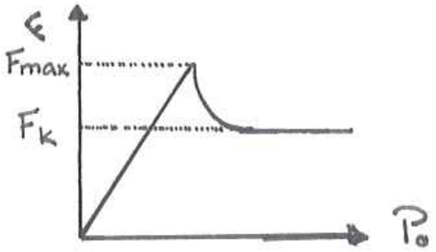
En kropp ligger på en sträv yta º påverkas av en yttre horisontell dragkraft P_0



Om $P_0 = 0 \Rightarrow F = 0$

Så länge kroppen ligger still, $P_0 = F$, kallas det för statisk friktion

När P_0 når F_{max} kommer kroppen börja glida F minskar omedelbart till ett lägre värde º förblir konstant, även om P_0 ökar.



Detta kallas kinetisk friktion

Approximativ förenkling (Coloumb modellen)

- Den maximala friktionskraften

  $F_{max} = \mu_s N$

  μ_s - statiska friktionskoefficienten

  μ_s beror endast på ytornas material º struktur

  $F \leq F_{max}$ vid statisk jämvikt

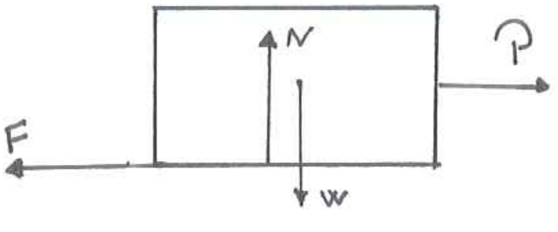
- Vid rörelse ges den kinetiska friktionskraften av:

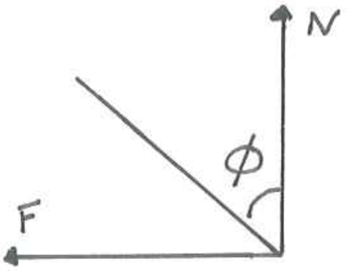
  $F_k = \mu_k N$

  μ_k - kinetisk friktionskoefficient

  μ_k beror endast på ytornas material º struktur

Friktionsvinkel ϕ





$$\tan \phi = \frac{F}{N} = \mu \text{ vid } F_{max}$$

Vid problemfall kan 3 fall uppstå

- Vi är intresserade av att veta under vilka villkor en kropp börjar röra sig
  $F = F_{max} = \mu_s N$

- Kroppen rör sig
  $F = F_k = \mu_k N$

- Vi vet ej om kroppen kommer röra sig
  Antag $F < F_{max}$
  Lös jämviktsvillkoren och lös ut F
  om $F < F_{max}$ ⇒ antagandet var rätt
  om $F > F_{max}$ ⇒ antag $F = F_k$

Dynamik behandlar kroppars rörelse under inverkan av krafter

- Kinematik – Beskrivning av en kropps rörelse utan hänsyn till de krafter som verkar på kroppen
- Kinetik – Relaterar hur obalanserade krafter leder till ändringar i rörelse

1.2 Grundläggande begrepp

- Rymd – Geometriskt område. Positionen i rymden mäts relativt i ett geometriskt referenssystem.
- Tid – Absolut kvantitet i Newtons mekanik.
- Massa – Tröghet mot ändringar i rörelse. Ger upphov till gravitation.
- Partikel – Kropp med försumbara dimensioner relativt dess rörelsebana
- Stel kropp – Försumbara inre deformationer

1.5 Gravitation

Tyngdacceleration: $g = G \frac{m_e}{R_e^2}$

1.7 Problemlösning i dynamik

- Arbeta systematiskt
  - Formulera problemet
  - Planera en lösningsstrategi
  - Fundera på eventuell approximation
- Rita tydliga figurer
  - Välj koordinatsystem
  - Friläggningsdiagram
- Var noggrann
  - Enheter
  - Dimensionsanalys
  - Rimlighet

2.2 Rätlinjig rörelse

Läget för en partikel som rör sig längs en rät linje kan beskrivas som något avstånd (s) till någon fix punkt. Variabeln s beskrivs som en funktion av tiden

$$v = \frac{ds}{dt} \qquad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

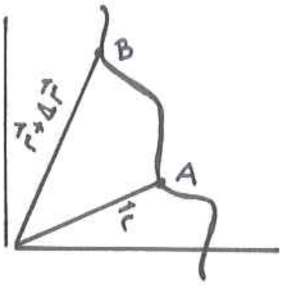
$$v(t) = \int_0^t a(t)\,dt + V_0 \qquad s(t) = \int_0^t v(t)\,dt + S_0$$

om a är konstant : $v(t) = V_0 + at$

$$s(t) = S_0 + V_0 t + \frac{at^2}{2}$$

2.3 Planrörelse

Läget för en partikell som rör sig i ett plan kan beskrivas med en lägesvektor $\vec{r}(t)$

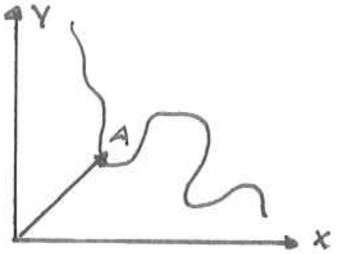


hastigheten pekar alltid tangentiellt med partikelns rörelsebana

$$\vec{v} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

I allmänhet är $\vec{a}$ varken tangentiell eller normal mot banan $v = |\vec{v}| = \text{fart}$

2.4 Cartesiska koordinatsystem



$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} \qquad (*)$$
$$\vec{v} = V_x\hat{i} + V_y\hat{j}$$
$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j}$$

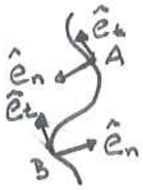
Derivering av (*) medavseende på tiden ⇒

$$V_x = \dot{x} \qquad a_x = \dot{V}_x = \ddot{x}$$
$$\Rightarrow$$
$$V_y = \dot{y} \qquad a_y = \dot{V}_y = \ddot{y}$$

Rörelsen kan delas in i två rätlinjiga rörelser i x-led samt y-led

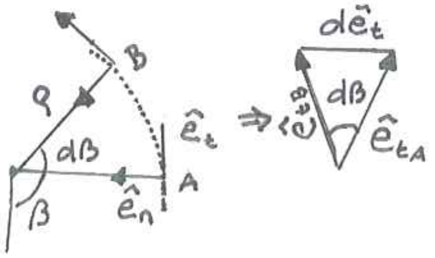
2.5 Koordinater i normal-och tangentriktning

För en partikel som rör sig längs en bana kan vi i varje ögonblick införa två ortogonala enhetsvektorer $\hat{e}_t$: $\hat{e}_n$ som är riktade tangentiellt samt normalt mot banan



enhetsvektorerna är tidsberoende

partikelns hastighet : $\vec{v} = v\hat{e}_t$ $\qquad \vec{a} = \dot{v}\hat{e}_t + v\dot{\hat{e}}_t$



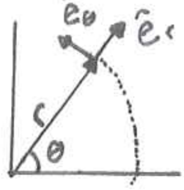
$$\Rightarrow \begin{cases} d\hat{e}_t = d\beta\,\hat{e}_n \\ \dfrac{d\hat{e}_t}{dt} = \dfrac{d\beta}{dt}\hat{e}_n \Leftrightarrow \dot{\hat{e}}_t = \dot{\beta}\hat{e}_n \\ \dot{\beta} = \dfrac{v}{\rho} \Rightarrow \vec{a} = \dfrac{v^2}{\rho}\hat{e}_n + \dot{v}\hat{e}_t \end{cases}$$

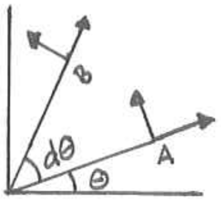
· krökningsradie

2.6 Polära koordinater

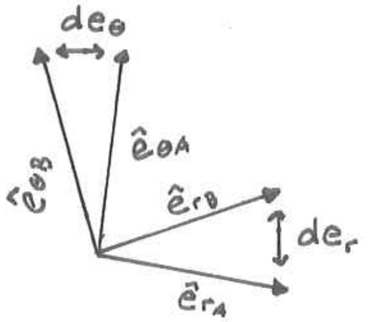
Lägesvektorn $\vec{r} = r\hat{e}_r$

Hastighetsvektorn $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\hat{e}}_r$





⇒



$$\left.\begin{aligned} d\hat{e}_r &= d\theta\,\hat{e}_\theta \\ d\hat{e}_\theta &= d\theta(-\hat{e}_r) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\hat{e}_r = \frac{d\hat{e}_r}{d\theta} \qquad -e_r = \frac{d\hat{e}_\theta}{d\theta}$$

Kedjeregeln ger:

$$\frac{d\hat{e}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\frac{d\hat{e}_r}{d\theta} \Rightarrow \dot{\hat{e}}_r = \dot{\theta}\hat{e}_\theta \quad \text{o̲} \quad \dot{\hat{e}}_\theta = -\dot{\theta}\hat{e}_r$$

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta$$

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{e}_\theta$$

Specialfall: rörelse i cirkulär bana ⇒ r = konstant

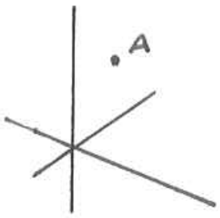
$$\dot{r} = \ddot{r} = 0 \Rightarrow \vec{v} = v\hat{e}_\theta$$

$$\vec{a} = r\ddot{\theta}\hat{e}_\theta - r\dot{\theta}^2\hat{e}_r$$

2.7 Rörelse i rummet

För att beskriva en partikels rörelse i 3 dimensioner finns flertalet koordinatsystem

- Cartesiska koordinater



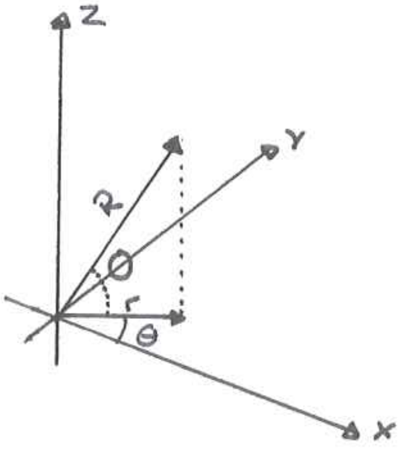
$$\vec{R}_A = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{R}}_A$$

$$\vec{a} = \ddot{\vec{R}}_A$$

- Cylindriska koordinater

- Sfäriska koordinater



ϕ = rotationsvinkel runt xy-planet

θ = rotationsvinkel runt z-planet

$$\vec{R} = R\hat{e}_R$$

$$\vec{v} = \dot{R}\hat{e}_R + R\dot{\theta}\cos\phi\,\hat{e}_\theta + R\dot{\phi}\,\hat{e}_\phi$$

$$\vec{a} = a_R\hat{e}_R + a_\theta\hat{e}_\theta + a_\phi\hat{e}_\phi$$

2.9 Tvångsvillkor

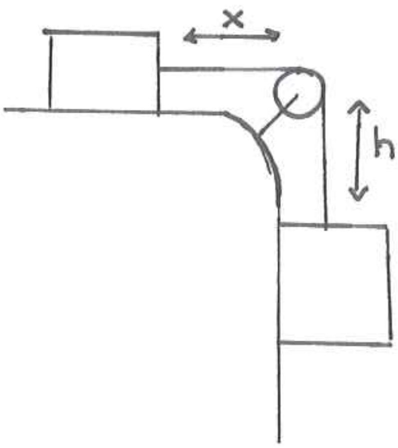
Antalet frihetsgrader för ett system är de antal variabler som krävs för att beskriva läget för samtliga kroppar i systemet vid en viss tidpunkt

1 partikel i rymden → 3 DOF

2 partiklar i rymden → 6 DOF

DOF = degrees of freedom

Ibland har man ett system av partiklar vars lägen är relaterade till varandra
⇒ reducerar antalet frihetsgrader



$x + h$ = linans längd

3.1 Partikelkinetik

Kombinera kraftbegreppet med kinematik för att analysera dynamiska förlopp

- Newtons andra lag
    - beskriver sambandet mellan de yttre krafterna som verkar på en partikel & dess acceleration
- Energiprincipen
    - uttrycker att de arbete som de yttre krafterna uträttar är lika med ändringen i partikelns energi
- Bevarande av rörelsemängd

3.3 Rörelseekvation º problemlösning

- Inför ett lämpligt koordinatsystem º dela upp vektorerna $\vec{F}$ º $\vec{a}$ i motsvarande komponenter

- Newtons andra lag ger då antal ekvationer baserat på rumsliga dimensioner

- Gör en korrekt friläggning. Rita en figur för varje delkropp º markera alla yttre krafter som verkar på kroppen

- Ibland är partikelns rörelse helt fri, men ibland finns det tvång som exempelvis begränsar den till ett plan eller följa given bana
  $\Rightarrow$ val av koordinatsystem

- Ställ upp Newtons andra lag

3.4 Rätlinjig rörelse

$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ kan delas upp i skalärkomponent form.

För cartesiska koordinater: $F_x = ma_x$

$F_y = ma_y$

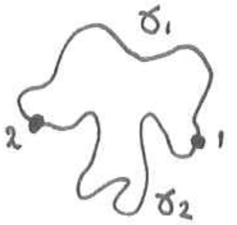
$F_z = ma_z$

Om vi vet att rörelsen är rätlinjig är det ofta praktiskt att välja koordinatsystem så att rörelsen sker längs en av axlarna, tex x-axeln Då räcker det att betrakta x-komponenten av rörelsen

$\vec{F} = ma_x\hat{i}$ beskriver alla rörelser

3.7 Potentiell energi

I ett givet kraftfält beror $\vec{F}(\vec{r})$ av läget $\vec{r}$ och en kurva γ i rummet mellan punkt 1 och 2



$U_{1-2} = \int \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r}$

konservativa krafter är oberoende av hur γ ser ut. $U_{1-2}\gamma_1 = U_{1-2}\gamma_2$

För en konservativ kraft kan vi definera dess potentiella energi V i en punkt P som det arbete som kraften uträttar vid en förflyttning från P till godtycklig referenspunkt

Summan av en partikels kinetiska engergi T och potentiella energin V kallas den totala mekaniska energin $E = V + T$

Antag att partikeln påverkas av konservativa krafter som beskrivs av dess potentiella energi och en annan kraft $\vec{F}$

$\Rightarrow \quad U_{1-2} = T_2 + V_2 - (T_1 + V_1) = E_2 - E_1$

Konservativa krafter

- Tyngdkraft : $W = -mg\hat{k}$

  $U_{2-1} = \int_{\gamma} -mg\hat{k} \cdot (dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}) = -mg\int_{\gamma} dz = mg(z_2 - z_1)$

- Linjär fjäder : $V_p = \frac{1}{2} k \Delta l^2$

- Gravitationskraft : $V = -G\frac{m \cdot M}{r^2} = -mgR^2\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$

Svängningsrörelse

Rörelseekvationen fås genom friläggningsdiagram för ett positivt värde på rörelsevariabeln.

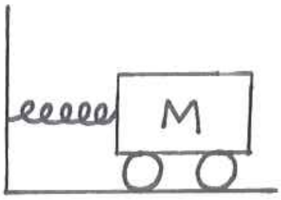
Kan dela upp svängningar i 2 huvudgrupper

- Fria svängningar - med o̲ utan dämpning

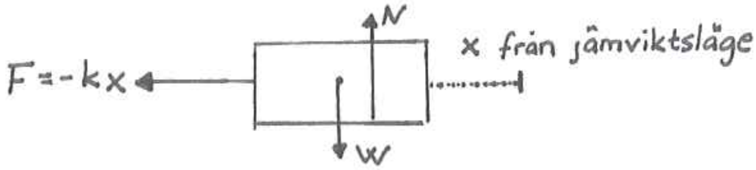
- Tvingade svängningar - med o̲ utan dämpning

8.2 Fria svängningar

(a) - utan dämpning



⇒



Newtons 2 i x-led:

$$F = m\ddot{x} = -kx$$

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \qquad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$ egenvinkelfrekvens (s^{-1})

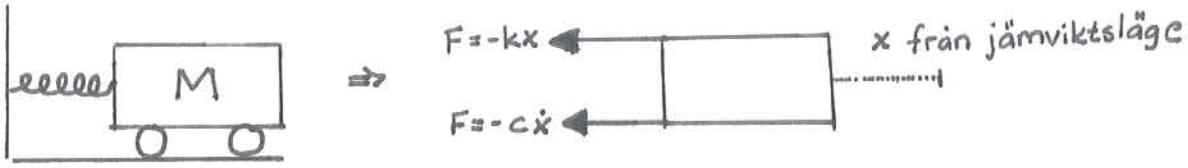
Ansats:

1, $x(t) = A\cos(\omega_n t) + B\sin(\omega_n t)$

2, $x(t) = C\sin(\omega_n t + \psi)$

Konstanterna fås genom begynnelsevärden

(b) - med dämpning



Newtons 2 i x-led :

$$m\ddot{x} = -kx - c\dot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\xi = \frac{c}{2\sqrt{\frac{k}{m}}} = \frac{c}{2\omega_n}$$

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = 0$$

Ansats:

$$Ae^{\lambda t}$$

$$\lambda^2 + 2\xi\omega_n\lambda + \omega_n^2 = 0 \qquad \lambda_{12} = \omega_n\left[\xi \pm \sqrt{\xi - 1}\right]$$

$$x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$$

$\xi > 1$ = stark dämpning ⇒ $\lambda_{12} < 0$ ingen svängning

$\xi = 1$ = kritisk dämpning ⇒ $\lambda_1 = \lambda_2$

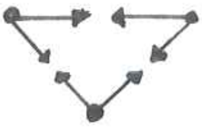
$\xi < 0$ = svag dämpning ⇒ komplexa värden

$$x(t) = Ae^{-\xi\omega_n t} \cdot B\sin(\omega_d t + \Psi)$$

Rörelsemängd och impuls

$$\vec{G} = \int \vec{F}\, dt = \vec{G}(t_2) - \vec{G}(t_1)$$

Den yttre impuls som verkar på en partikel under ett tidsintervall är lika med ändringen i dess rörelsemängd $\vec{F} = 0 \Rightarrow$ bevarad



Rörelsemängd för en enskild partikel kan ändras, men parvis tar krafterna ut varandra

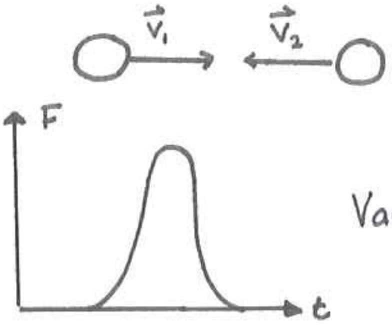
3.10 Rörelsemängdsmoment

$$\vec{H} = \vec{r} \times \vec{G}$$
$$\dot{\vec{H}} = \dot{\vec{r}} \times \vec{G} + \vec{r} \times \dot{\vec{G}} = \dot{\vec{r}} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \dot{\vec{G}} = 0 + \vec{r} \times m\vec{a}$$
$$\dot{\vec{H}} = \vec{r} \times \vec{F} = \text{vridmoment}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{M}\, dt = \vec{H} \Delta t = \text{impulsmoment}$$

$H = 0 \Rightarrow$ rörelsemängd bevarad, gäller komponentvis

3.12 Stötförlopp



Vid en kollision utvecklas stora kontaktkrafter under väldigt kort tid. Vanligtvis försummas övriga krafter under denna tidsperiod

Slutet system ⇒ totala rörelsemängden konstant

Rak central stöt

- Lagen om rörelsemängdens bevarande ⇒

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$$

- stötkoefficient $e = \dfrac{|v_2' - v_1'|}{|v_2 - v_1|}$

$e = 1$ ⇒ elastisk stöt = inga energiförluster

$e = 0$ ⇒ plastisk stöt = maximal kinetisk energiförlust

$0 < e < 1$ ⇒ inelastisk stöt

Sned central stöt

$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2'$

i tangentens riktning överförs ingen impuls

$m_1 \vec{v}_1(t) = m_1 \vec{v}_2(t)$

$$e = \frac{|v_2' - v_1'|}{|v_2 - v_1|}$$

3.13 Centralrörelse

$\vec{F} = F(r)\hat{e}_r$ utövar inget vridmoment med avseende på rörelsens centrum $\Rightarrow \Delta H = 0$

Om en partikel med massan m rör sig i ett gravitationsfält från en annan partikel med massan M

$\vec{F} = -G \frac{m \cdot M}{r^2} \hat{e}_r$

Newtons 2 i polära koordinater:

r-led : $\vec{F} = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$

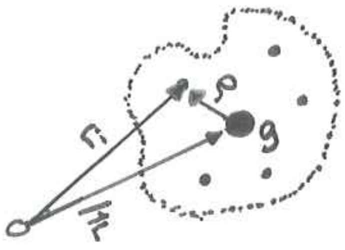
θ-led : $m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0$ (*)

$(*) \cdot \frac{r}{m} \Rightarrow 0 = r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0 \Rightarrow$

$H = mr^2\dot{\theta} = 0$ utövar inget vridmoment kring centrum

Partikelsystem

N st fria partiklar har 3N frihetsgrader. I en stel kropp är avståndet mellan partiklarna konstant



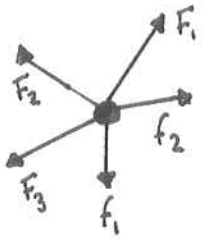
$m = \sum m_i$ systemets totala massa

$m\vec{\bar{r}} = \sum m_i \vec{r}_i$ masscentrum

$\vec{r}_i = \vec{\bar{r}} + \rho_i$ lägesvektor

$\vec{V}_i = \vec{\bar{V}} + \dot{\vec{\rho}}_i$ hastighetsvektor

$\sum m_i \vec{\rho}_i = 0 = \frac{d}{dt}(\sum m_i \rho_i)$ om m är konstant



F = externa krafter

f = interna krafter

$\vec{F} = \sum F_i + \sum f_j = \sum m_i \ddot{\vec{r}} = \sum F_{ex} = \vec{R}$

$\sum m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum m_i (\ddot{\vec{\bar{r}}} + \ddot{\rho}_i) = m\ddot{\vec{\bar{r}}}$

$\vec{R} = m\ddot{\vec{\bar{r}}} = m\overline{\vec{a}}$

4.3 Arbete-energiprincipen

$U_{1-2,i} = \Delta T_i$ där U är arbetet från samtliga interna & externa krafter

I idealfallet då alla interna friktionskrafter = 0 ⇒ arbetet från de interna krafterna = 0 ⇒ U_{1-2} beror endast av externa krafter

Totala kinetiska energin : $T = \sum \frac{m_i}{2}(\vec{V}+\dot{\vec{\rho}})(\vec{V}+\dot{\vec{\rho}})$

$$T = \sum \frac{m_i}{2}(\vec{V}^2 + \underbrace{2\vec{V}\dot{\vec{\rho}}}_{0} + \dot{\vec{\rho}}^2) = \underbrace{\frac{m\vec{V}^2}{2}}_{(1)} + \underbrace{\sum \frac{m_i\dot{\vec{\rho}}^2}{2}}_{(2)}$$

(1) masscentrums rörelse

(2) övriga partiklars rörelse

4.5 Konservering av energi, rörelsemängd & moment

Ett system kallas konservativt om det inte finns några interna friktionskrafter som uträttar ett negativt nettoarbete, samt om systemet ej utsätts för externa krafter

$E = \Delta T + \Delta V = 0$

$\vec{R} = 0 \Rightarrow \vec{G}_1 = \vec{G}_2$

$\vec{M} = 0 \Rightarrow \vec{H}_1 = \vec{H}_2$

4.4 Rörelsemängdsmoment & rörelsemängd

Total rörelsemängd: $\vec{G} = \sum m_i v_i = \sum m_i (\bar{v} + \dot{\rho}_i)$

$$\sum \dot{\rho}_i = 0 \Rightarrow \vec{G} = m\vec{\bar{v}}$$

Totalt rörelsemängdsmoment: $\vec{H} = \sum r_i \times m_i v_i$

$$\dot{H} = \sum \dot{r}_i \times m_i v_i + r_i \times m_i \dot{v}_i$$

$\dot{r}_i = v_i \Rightarrow \dot{r}_i \times m_i v_i = 0 \Rightarrow \dot{H} = r_i \times F_i$

summan av alla vridmoment från interna krafter $= 0$

$$\vec{H} = \sum r_i \times m_i v_i = \sum (\bar{r} + \vec{\rho}_i) \times m(\bar{v}_i + \dot{\vec{\rho}}_i) =$$

$$\sum m_i (\vec{r} \times \vec{v} + \bar{r}\dot{\vec{\rho}}_i + \bar{\rho}_i \times \bar{v} + \vec{\rho} \times \dot{\vec{\rho}})$$

$$\left.\begin{array}{l} \sum m_i \vec{\rho}_i = 0 \\ \sum m_i \dot{\vec{\rho}}_i = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underset{(1)}{m(\bar{r} \times \bar{v})} + \underset{(2)}{\sum m_i \vec{\rho}_i \times \dot{\vec{\rho}}_i} = \vec{r} \times m\vec{v} + H_G$$

(1) rörelsemängdsmoment med avseende på en annan punkt än masscentrum

(2) rörelsemängdsmoment med avseende på masscentrum

$$\dot{\vec{H}}_o = \vec{r} \times m\vec{a} + \dot{\vec{H}}_G = \vec{r} \times \vec{R} + \dot{\vec{H}}_G$$

Stelkroppskinematik

En stel kropp har 3 frihetsgrader i en plan rörelse på grund av rotation

Translation ⇒ 2 frihetsgrader
Rotation ⇒ 1 frihetsgrad
ρ_i konstant $\forall i$

Rotation:

$\omega = \frac{d}{dt}\theta$ vinkelhastighet

$\alpha = \dot{\omega}$ vinkelacceleration

Antag att enbart rotation existerar. Då finns det en punkt som ej är i rörelse där rotationsaxeln passerar

$$\dot{r}_A = 0$$

$$\vec{r}_A = r_A\hat{e}_r$$

$$\vec{v}_A = \dot{\vec{r}}_A = \dot{r}_A\hat{e}_r + r_A\dot{\hat{e}}_r = 0 + r_A\dot{\theta}_A\hat{e}_\theta = r_A\omega\hat{e}_\theta$$

$$a_A = r_A\alpha\hat{e}_\theta - r_A\omega^2\hat{e}_r$$

Rotationsvektorn $\vec{\omega}$ har längden ω och är riktad längs rotationsaxeln enligt skruvregeln ⇒

$\vec{v}_A = \vec{\omega} \times \vec{r}_A$ $\vec{a} = \vec{\omega} \times \vec{v}_A + \vec{\alpha} \times \vec{r}_A$