



Studienämnden Kf / Kb

2.55 $L = \text{Lyme disease}$, $P(L) = 0,10$; $H = \text{HKE}$, $P(H) = 0,10$

$$P(L \cap H) = 0,10 P(L \cup H)$$

$$P(L \cup H) = P(L) + P(H) - P(L \cap H) = [P(L \cap H) = 0,10 P(L \cup H)] = \\ = P(L) + P(H) - 0,10 P(L \cup H)$$

$$\Rightarrow P(L \cup H)(1 + 0,10) = P(L) + P(H) \Rightarrow P(L \cup H) = \frac{P(L) + P(H)}{1,10}$$

$$P(L \cap H) = 0,10 P(L \cup H) = 0,10 \frac{P(L) + P(H)}{1,10}$$

$$P(L|H) = \frac{P(L \cap H)}{P(H)} = \frac{0,10 \frac{P(L) + P(H)}{1,10}}{P(H)} = \frac{0,10(P(L) + P(H))}{1,10 P(H)} = \\ = \frac{0,10(0,10 + 0,10)}{1,10 \cdot 0,10} \approx \underline{0,236}$$

2.59 $P(A_1) = 0,40$, $P(A_2) = 0,35$, $P(A_3) = 0,25$;

$$P(B_1) = 0,30$$
, $P(B_2) = 0,60$, $P(B_3) = 0,50$

a) $P(A_2 \cap B_2) = P(A_2) \cdot P(B_2) = 0,35 \cdot 0,60 = \underline{0,21}$

b) $P(B) = P(A_1 \cap B_1) + P(A_2 \cap B_2) + P(A_3 \cap B_3) = P(A_1)P(B_1) + P(A_2)P(B_2) + \\ + P(A_3)P(B_3) = 0,40 \cdot 0,30 + 0,35 \cdot 0,60 + 0,25 \cdot 0,50 = \underline{0,455}$

c) $P(A_1|B) = \frac{P(A_1 \cap B_1)}{P(B)} = \frac{P(A_1)P(B_1)}{P(B)} = \frac{0,40 \cdot 0,30}{0,455} \approx \underline{0,264}$

$$P(A_2|B) = \frac{P(A_2)P(B_2)}{P(B)} = \frac{0,35 \cdot 0,60}{0,455} \approx \underline{0,462}$$

$$P(A_3|B) = \frac{P(A_3)P(B_3)}{P(B)} = \frac{0,25 \cdot 0,50}{0,455} \approx \underline{0,275}$$

2.71 $P(A) = 0,4$, $P(B) = 0,7$

a) Oberoende $\Rightarrow P(B'|A') = \frac{P(B' \cap A')}{P(A')} = \frac{P(B')P(A')}{P(A')} = 1 - P(B) = \\ = 1 - 0,7 = \underline{0,3}$

b) F : Minst en framgångsrik; F' : Ingen framgångsrik

$$P(F) = 1 - P(F') = [P(F') = P(A')P(B')] \text{ (från } P(A' \cap B'))] = \\ = 1 - P(A')P(B') = 1 - 0,6 \cdot 0,3 = \underline{0,82}$$



Studienämnden Kf / Kb

c) (A_i : Enlast A framgångsrik)

$$P(A|F) = \left(\frac{P(A \cap F)}{P(F)} \right) = \frac{P(A \cap B')}{P(F)} = \frac{P(A)P(B')}{P(F)} = \frac{0,4 \cdot 0,3}{0,82} = \underline{\underline{\approx 0,146}}$$

2.80



S: System fungerar

K: Komponent fungerar, $P(K) = 0,9$

$$P(S) = 1 - P(S') = [P(S') = 0,1^2(1 - 0,9^2)] = \underline{\underline{0,9981}} \quad \text{Facit saknas}$$



3.1 $FFF \Rightarrow X=0$; $FFS, FSF, SFF \Rightarrow X=1$

$FSS, SFS, SSF \Rightarrow X=2$; $SSS \Rightarrow X=3$

3.5 Nej, inte nödvändigtvis. Exempelvis Bernoulli rv kan vara 0 eller 1.

3.7a) $X = \{0, 1, 2, \dots, 12\}$, diskret.

b) $Y = \{0, 1, 2, \dots, x\}$, där x = antalet elever i klassen. Diskret.

c) $U = \{0, 1, 2, \dots\}$, diskret.


d) $\{X \neq \emptyset : X_{\min} \leq X \leq X_{\max}\}$, där X_{\max} = längsta möjliga längd för en skallerorm, X_{\min} = kortaste möjliga längd för en skallerorm. Kontinuerlig.

e) $Z = \{0, c, 2c, \dots, 10000c\}$, där c = värdet för en boll. Diskret.

f) $\{Y \neq \emptyset : p_{H_{\min}} \leq Y \leq p_{H_{\max}}\}$, kontinuerlig.

g) $\{X : X_{\min} \leq X \leq X_{\max}\}$, kontinuerlig.

h) $X = \{0, 1, 2, \dots\}$, diskret.

3.9  a) $X = \{2, 4, 6, 8, \dots\} = \{1 \cdot 2, 2 \cdot 2, 3 \cdot 2, 4 \cdot 2, \dots\}$, diskret.

b) $X = \{2, 3, 4, 5, \dots\} = \{1+1, 1+2, 1+3, 1+4, \dots\}$, diskret.

3.13a) $p(\max 3) = P(X \leq 3) = 0,10 + 0,15 + 0,20 + 0,25 = \underline{\underline{0,70}}$

b) $p(\text{färre än 3}) = P(X \leq 2) = 0,10 + 0,15 + 0,20 = \underline{\underline{0,45}}$

c) $p(\text{minst 3}) = P(3 \leq X \leq 6) = 0,25 + 0,20 + 0,06 + 0,04 = \underline{\underline{0,55}}$

d) $p(2 \text{ till } 5) = P(2 \leq X \leq 5) = 0,20 + 0,25 + 0,20 + 0,06 = \underline{\underline{0,71}}$

Lösningar skrivna av Jonas Elmwall
Lp2 2008



Studienämnden Kf / Kb

Fortsättning 3.13

$$e) p(2 \text{ till } 4 \text{ använda}) = p(2 \text{ till } 4 \text{ används}) = P(2 \leq X \leq 4) = 0,20 + 0,25 + 0,20 = \underline{0,65}$$

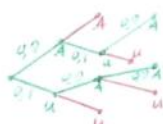
$$f) p(\text{minst } 4 \text{ använda}) = p(\text{max } 2 \text{ används}) = P(X \leq 2) = 0,10 + 0,15 + 0,20 = \underline{0,45}$$

$$3.15 \quad P(A) = 0,9; \quad P(U) = 0,1$$

$$a) p(2) = p(Y=2) = 0,9^2 = \underline{0,81}$$



b)



Det finns två utfall som ger $Y=3$: AUA, UAA

$$\Rightarrow p(3) = P(Y=3) = 2 \cdot 0,9^2 \cdot 0,1 = \underline{0,162}$$

c) Kravet är att det sista utfallet är A!

Utfall: AUUUA, UAUUA, UUAUA, UUUAA, 4 st

$$\Rightarrow p(5) = P(Y=5) = 4 \cdot 0,9^4 \cdot 0,1 = \underline{0,0254}$$

Facit blev fel. Har anv faktor 5 istället för 4...

$$d) p(y) = P(Y=y) = \underline{0,9^y \cdot 0,1 \cdot y^{-1}}$$

$$3.23 a) p(2) = P(X=2) = P(X \leq 2) - P(X \leq 1) = F(2) - F(1) = 0,30 - 0,10 = \underline{0,20}$$

$$b) P(X > 3) = P(X \leq 6) - P(X \leq 3) = F(6) - F(3) = 1 - 0,67 = \underline{0,33}$$

$$c) P(2 \leq X \leq 5) = P(X \leq 5) - P(X \leq 1) = F(5) - F(1) = \underline{0,78} \quad (0,97 - 0,19)$$

$$d) P(2 < X < 5) = P(X \leq 4) - P(X \leq 2) = F(4) - F(2) = 0,92 - 0,30 = \underline{0,53}$$

$$3.49 \quad P(S) = 0,10; \quad P(F) = 0,9 \quad S: sekundära, F: fina$$

$$a) P(X=1) = b(1; 6, 0,1) = \binom{6}{1} 0,1^1 0,9^5 = \underline{0,354}$$

$$b) P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - B(1; 6, 0,1) = 1 - \sum_{x=0}^1 b(x; 6, 0,1) =$$

$$= 1 - \left(\binom{6}{0} 0,1^0 0,9^6 + \binom{6}{1} 0,1^1 0,9^5 \right) = \underline{0,114}$$

Arvmodlingsfel i facit

$$c) p(X=4, n \leq 5) = [Krav: Sista är F \Rightarrow 4 \leq n \leq 5] = \sum_{n=4}^5 b(4; n, 0,9) - P(\text{sista är S vid } n=5)$$

$$= \binom{4}{4} 0,9^4 + \binom{5}{4} 0,9^4 0,1 - 0,9^5 0,1 = \underline{0,918}$$

Lösningar skrivna av Jonas Elmwall
Lp2 2008



Studienämnden Kf / Kb

3.58 R-reparation, $P(R) = 0,001$; N ny enhet, $P(N) = 0,4$, $n = 10$

$$P(X=2) = \binom{10}{2} 0,4^2 0,6^8 = \underline{0,1209} \quad \text{Facit har oförklarligt svarat } \binom{11}{2}$$

3.69 $R=12$; $C=7$, $L=5$, $n=6$, $X = \text{Antalet } C$

$$a) P(X=x) = h(x, n, M, N) = \frac{\binom{4}{x} \binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$$\Rightarrow P(X=5) = \frac{\binom{7}{5} \binom{1}{1}}{\binom{12}{6}} = \frac{\frac{7!}{2!5!} \cdot 1!}{\frac{12!}{6!6!}} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 6}{8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12} = \frac{5 \cdot 3 \cdot 2}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{5}{44} = \underline{0,114}$$

$$b) P(X \leq 4) = \sum_{x=0}^4 h(x; 6, 7, 12) = 0 + 0,0076 + 0,1136 + 0,3788 + 0,3788 = \underline{\approx 0,879}$$

3.81 $\lambda = 20$

$$a) P(X \leq 10) = \sum_{x=0}^{10} \frac{e^{-20} 20^x}{x!} \approx \underline{0,011}$$

$$b) P(X > 20) = 1 - P(X \leq 20) = 1 - \sum_{x=0}^{20} \frac{e^{-20} 20^x}{x!} = 1 - 0,559 = \underline{0,441}$$

$$c) P(10 \leq X \leq 20) = P(X \leq 20) - P(X \leq 9) = 0,559 - \sum_{x=0}^9 \frac{e^{-20} 20^x}{x!} = 0,559 - 0,005 = \underline{0,554}$$

$$d) P(10 < X < 20) = P(11 \leq X \leq 19) = P(X \leq 19) - P(X \leq 10) = \sum_{x=0}^{19} \frac{e^{-20} 20^x}{x!} - 0,011 = 0,470 - 0,011 = \underline{0,459}$$

4.1 $f(x) = \begin{cases} 0,5x & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$

$$a) P(X \leq 1) = \int_0^1 0,5x dx = \left[\frac{x^2}{4} \right]_0^1 = \underline{0,25}$$

$$b) P(0,5 \leq X \leq 1,5) = \left[\frac{x^2}{4} \right]_{0,5}^{1,5} = \frac{1,5^2 - 0,5^2}{4} = \underline{0,5}$$

$$c) P(1,5 < X) = \left[\frac{x^2}{4} \right]_{1,5}^2 = \frac{2^2 - 1,5^2}{4} = \underline{0,4375}$$

Lösningar skrivna av Jonas Elmwall
Lp2 2008



Studienämnden Kf / Kb

$$4.5 \quad f(x) = \begin{cases} kx^2 & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{Annars} \end{cases}$$

a) A: Hant ^{avslutar} ~~avslutar~~, $P(A) = 1,0$

$$P(A) = P(0 \leq x \leq 2) = \int_0^2 kx^2 dx = \frac{k}{3} [x^3]_0^2 = \frac{k}{3} 8 = 1 \Rightarrow k = \frac{3}{8} = \underline{0,375}$$

b) $P(X \leq 1) = \frac{k}{3} [x^3]_0^1 = \frac{0,375}{3} = \underline{0,125}$

c) $\frac{4}{6} \leq x \leq \frac{20}{6} \Rightarrow 1 \leq x \leq 1,5$

$$\Rightarrow P(1 \leq x \leq 1,5) = \frac{k}{3} [x^3]_1^{1,5} = \frac{0,375}{3} (1,5^3 - 1^3) = \underline{0,227}$$

d) $P(X \leq 1,5) = \frac{k}{3} [x^3]_{1,5}^2 = \frac{k}{3} (2^3 - 1,5^3) = \frac{0,375}{3} (2^3 - 1,5^3) = \underline{0,578}$

4.9 $A = 25; B = 35$

a) $f(x; A, B) = \begin{cases} \frac{1}{B-A} = \underline{0,1} & 25 \leq x \leq 35 \\ 0 & \text{Annars} \end{cases}$

b) $P(X < 33) = \int_{25}^{33} 0,1 dx = \underline{0,20}$

c) $P(\mu - 2 \leq x \leq \mu + 2), \mu = \frac{25+35}{2} = 30$

$$\Rightarrow P(28 \leq x \leq 32) = \int_{28}^{32} 0,1 dx = \underline{0,40}$$

d) $25 < a < a+2 < 35$

$$P(a < x < a+2) = \int_a^{a+2} 0,1 dx = 0,1(a+2-a) = \underline{0,20}$$

3.29 a) $E(X) = \mu_x = \sum_{x \in D} xp(x) = 0 \cdot 0,08 + 1 \cdot 0,15 + 2 \cdot 0,45 + 3 \cdot 0,27 + 4 \cdot 0,05 = \underline{2,06}$

b) $V(X) = \sum_{x \in D} (x - \mu)^2 p(x) = (0 - 2,06)^2 \cdot 0,08 + (1 - 2,06)^2 \cdot 0,15 + (2 - 2,06)^2 \cdot 0,45 + (3 - 2,06)^2 \cdot 0,27 + (4 - 2,06)^2 \cdot 0,05 = \underline{0,9364}$

c) $\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2} = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0,9364} = \underline{0,9677}$

Lösningar skrivna av Jonas Elmwall
Lp2 2008



Studienämnden Kf / Kb

3.29d) $V(x) = \sigma_x^2 = \left[\sum_n x^2 p(x) \right] - \mu^2 = \underline{0,2364}$

3.31 $f(x) = \begin{cases} 1-p & x=0 \\ p & x=1 \\ 0 & x=0,1 \end{cases}$

a) $E(x^2) = 0^2 \cdot p(0) + 1^2 \cdot p(1) = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = \underline{p}$

b) $V(x) = E(x^2) - [E(x)]^2 = p - p^2 = \underline{p(1-p)}$

c) $E(x^{20}) = 0^{20} p(0) + 1^{20} p(1) = \underline{p}$

3.65 $P(A)=0,5; P(B)=0,2; P(C)=0,3;$

a) $n=100$

$E(x) = n \frac{M}{N}, \frac{M}{N} = P(B) \iff E(x) = 100 \cdot 0,2 = \underline{20}$

$V(x) = \frac{N-n}{N-1} n \frac{M}{N} \left(1 - \frac{M}{N}\right) = \frac{N-n}{N-1} \cdot n P(B) (1-P(B))$

Antag N är mycket stort $\implies \frac{N-n}{N-1} \approx 1$

$\implies V(x) = 100 \cdot 0,2 \cdot 0,8 = \underline{16}$

b) $P(C') = 0,7$

$E(x) = 100 \cdot 0,7 = \underline{70}$

$V(x) = 100 \cdot 0,7 \cdot 0,3 = \underline{21}$

3.69 $R=N=12; C=M=7; L=6; n=6$

d) $E(x) = n \frac{M}{N} = 6 \frac{7}{12} = 3,5$

$V(x) = \frac{N-n}{N-1} n \frac{M}{N} \left(1 - \frac{M}{N}\right) = \frac{12-6}{12-1} 6 \frac{7}{12} \left(1 - \frac{7}{12}\right) = 0,7955$

$\sigma = \sqrt{V(x)} = 0,8919$

$\implies P(x < E(x) + \sigma) = P(x < 4,392) = P(x \leq 5) = \sum_{x=5}^6 h(x; 6, 7, 12) = \underline{0,121}$

d) Binomialdistributionen där $n=15$ och $p=0,10$ ($\frac{40}{400}$)



Studienämnden Kf / Kb

3.77 $p=0.5; r=2$ ($p(\text{pojke})=0.5 \Rightarrow p(\text{flicka})=0.5$)
 $\leftarrow p(\text{flicka})$

a) $nb(x; 2, 0.5) = \binom{x+2-1}{2-1} 0.5^2 (1-0.5)^x = \binom{x+1}{1} 0.5^2 0.5^x = (x+1) 0.5^{x+2}$

b) $n=4 \Rightarrow x=2$

$\Rightarrow nb(2; 2, 0.5) = 3 \cdot 0.5^4 \approx 0.188$

c) $P(X \leq 2) = \sum_{x=0}^2 nb(x; 2, 0.5) = 1 \cdot 0.5^2 + 2 \cdot 0.5^3 + 3 \cdot 0.5^4 \approx 0.688$

d) Pojkar: $E(X) = \frac{r(1-p)}{p} = \frac{2 \cdot 0.5}{0.5} = 2$

Barn: $E(X) = 2 + 2 = 4$

3.81 $\lambda=20$

d) $E(X) = V(X) = \lambda \Rightarrow \sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\lambda} = \sqrt{20}$

$P(E(X) - 2\sigma \leq X \leq E(X) + 2\sigma) = P(20 - 2\sqrt{20} \leq X \leq 20 + 2\sqrt{20}) =$
 $= P(12 \leq X \leq 28) = \sum_{x=12}^{28} \frac{e^{-20} 20^x}{x!} \approx 0.944$

4.11 $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x}{4}, & 0 \leq x < 2 \\ 1, & 2 \leq x \end{cases}$

a) $P(X \leq 1) = \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{4} = 0.25$

b) $P(0.5 \leq X \leq 1) = F(1) - F(0.5) = \frac{1}{4} - \frac{0.5^2}{4} = 0.1875$

c) $P(X > 0.5) = 1 - F(0.5) = 0.9375$

d) $F(\mu) = 0.5 \Rightarrow \frac{\mu^2}{4} = 0.5 \Rightarrow \mu = \sqrt{2} \approx 1.4142$

e) $F'(x) = f(x) = \frac{x}{4}$, for $0 \leq x < 2$

f) $E(X) = \mu_x = \int_0^2 x f(x) dx = \int_0^2 \frac{x^2}{4} dx = \left[\frac{x^3}{12} \right]_0^2 = \frac{8}{12} \approx 0.6667$

g) $V(X) = \sigma_x^2 = \int_0^2 (x - \mu_x)^2 f(x) dx = \int_0^2 \left(\frac{x^3}{2} - \mu_x x^2 + \frac{\mu_x^2 x}{2} \right) dx = \left[\frac{x^4}{8} - \mu_x \frac{x^3}{3} + \frac{\mu_x^2 x^2}{4} \right]_0^2 =$

$= \frac{16}{8} - \mu_x \frac{8}{3} + \frac{\mu_x^2 \cdot 4}{4} = 2 - \frac{8}{3} \mu_x + \mu_x^2 = 0.2222$

$\sigma_x = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0.2222} \approx 0.471$

Lösningar skrivna av Jonas Elmwall
Lp2 2008