



Studienämnden Kf / Kb

DECEMBER 2008

TRANSPORTPROCESSER

TEORI

Av: PATRIK "PUTTE" ANDERSSON

kf - 06



Studienämnden Kf / Kb

Definera Nu , Re , Pr , Sc , Gr , Gr_{AB} , Sh och ge dem fysikalisk tolkning!

$$Nu = \frac{hL}{k} = \frac{\text{verklig värmeöverföring}}{\text{fiktivt fall med enbart ledning}}$$

$$Re = \frac{vD}{\nu} = \frac{\text{tröghetskrafter}}{\text{viskösa krafter}}$$

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\text{rörelsemängdsdiffusivitet}}{\text{värmef diffusivitet}}$$

$$Sc = \frac{\nu}{D_{AB}} = \frac{\text{rörelsemängdsdiffusivitet}}{\text{massdiffusivitet}}$$

$$Gr = \frac{\beta g \rho^2 L^3 \Delta T}{\mu^2} = \frac{\text{lyftkraft}}{\text{friktionskraft}}$$

$$Gr_{AB} = \frac{L^3 g \rho^2 (\Delta \rho_A)}{\mu^2} = \frac{\text{nettokraft}}{\text{friktionskraft}}$$

$$Sh = Nu_{AB} = \frac{k_c L}{D_{AB}} = \frac{\text{molekylär masstransport motstånd}}{\text{konvektiv masstransport motstånd}}$$



Studienämnden Kf / Kb

Två toarullar ligger nära varandra. Genom att blåsa hårt med ett sugrör mellan dem, rör de sig mot varandra. Förklara med hjälp av Bernoullis ekvation!

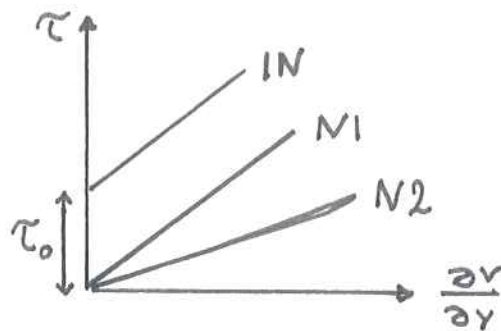
Rullarna rör sig på grund av att det blir en trycksänkning mellan rullarna. Strömning sker endast då det förekommer en tryckskillnad

$$P + \rho gh + \frac{\rho v^2}{2} = \text{konstant}$$

Om $\rho \cdot v$ ökar minskar P , ty ρgh är konstant.
Alltså sker en strömning då P minskar



Studienämnden Kf / Kb



τ - skjuvspänning

$\frac{dv}{dy}$ - skjuvhastighet

- a, $N1 = N2$ är två Newtonska vätskor. Vilken av dem har högst viskositet?

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy}$$

Hög viskositet \Rightarrow hög skjuvspänning

τ ökar med ökande lutning

\Rightarrow $N1$ har högre viskositet än $N2$

- b, Tolka figuren för den icke-Newtonska vätskan, IN !

En viss skjuvspänning, τ_0 , måste tillföras innan deformationen sker. Den följer ett linjärt samband vilket innebär att det är en ideal plastisk fluid

Newtonsk fluid \Rightarrow relationen mellan skjuvspänning och skjuvhastighet är linjär.



Studienämnden Kf / Kb

Härled med en stationär differentiell rörelsemängdsbalans, ett uttryck för hastighetsprofilen vid fullt utvecklade strömning mellan två horisontella plana plattor

Se lösningen till uppgift 5.3



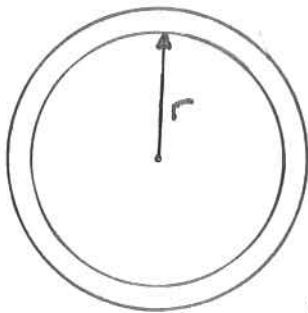
Studienämnden Kf / Kb

Vid dimensionering av en tubvärmväxlare, där motståndet mot värmetransport helt ligger på rörets insida, vill man lägga på en säkerhetsmarginal (med avseende på värmeöverföringskapaciteten) på 20%. Vid dimensionering användes

$$Nu = 0.023 Re^{0.8} Pr^{0.3} \quad \text{Flödet antas konstant}$$

Uppnås säkerhetsmarginalen om

a, tubdiametern ökar med 20%



$$q = h \cdot A \cdot \Delta T = \pi D L \cdot h \cdot \Delta T$$

$$Nu = \frac{hD}{k} = 0.023 Re^{0.8} Pr^{0.3}$$

$$\Rightarrow q = \pi D \frac{k}{D} \cdot 0.023 Re^{0.8} Pr^{0.3} \cdot L \cdot \Delta T$$

$$\Rightarrow q = \pi k \cdot 0.023 \left(\frac{\rho v D}{\mu} \right)^{0.8} Pr^{0.3} \cdot L \cdot \Delta T$$

q beror av $D^{0.8}$. q kommer inte öka med 20% om D ökar med 20%

b, tublängden ökar med 20%

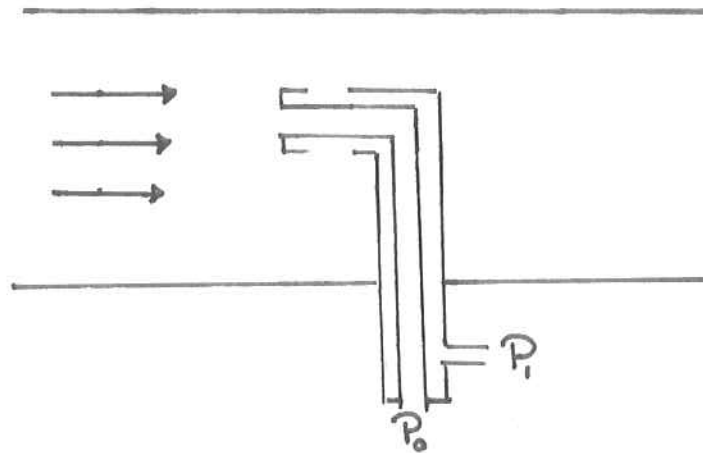
q ökar 20% om L ökar med 20% ty

q är proportionell mot L



Studienämnden Kf / Kb

Hur fungerar och vad mäter ett Prandtlrör?



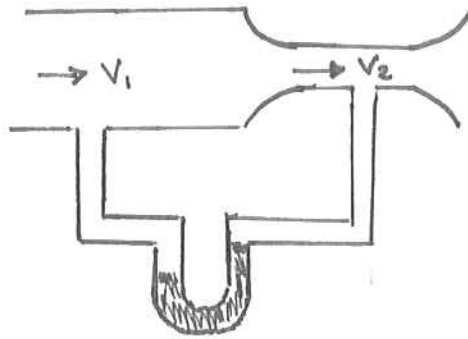
Med ett prandtlrör kan strömningshastigheten bestämmas då det mäter skillnaden mellan stagnationstrycket och det statiska trycket

$$P_0 - P_1 = \frac{\rho v^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2(P_0 - P_1)}{\rho}}$$



Studienämnden Kf / Kb

Hur fungerar och vad mäter ett venturirör?



Det används för flödesmätning. Genom att mäta tryckskillnaden kan hastigheten bestämmas

$$P_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 = P_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2$$

$$v_1 A_1 = v_2 A_2 \Rightarrow$$

$$v_1 = \left(\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho \left(\left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 - 1 \right)} \right)^{1/2}$$

$$\Delta P = \rho g h \quad \text{för vätskan i det lilla röret}$$



Studienämnden Kf / Kb

- a, Vilket dimensionslöst tal används för att karakterisera omslag från laminärt till turbulent strömning? Ge en fysikalisk tolkning!

Reynolds tal $Re = \frac{\text{tröghetskrafter}}{\text{viskösa krafter}}$

Säger hur viktiga tröghetskrafterna är jämfört med de viskösa krafterna

- b, Hur beror omslagsvärdet på om omslagspunkten nalkas från lägre eller högre hastighet?

$$Re = \frac{\rho v L}{\mu}$$

Ett högre Re erhålls då Re_{krit} nalkas från lägre hastighet och ett lägre Re erhålls då Re_{krit} nalkas från högre hastighet



Studienämnden Kf / Kb

a, Vilka mekanismer finns för transport av värme?

konvektion, ledning, strålning

b, Vad menas med påtvingad respektive fri konvektion av värme? Vilka dimensionslösa tal används för att beskriva dessa värmeöverföringsfall?

Ge talen fysikalisk tolkning!

Påtvingad konvektion innebär att fluiden tvingas strömma, exempelvis med hjälp av pump och fläkt

Fri konvektion beror av densitetsskillnader inom fluiden

$$\text{Påtvingad: } Nu = Nu(Re, Pr)$$

$$\text{Naturlig (fri) } Nu = Nu(Gr, Pr)$$

$$Nu = \frac{h \cdot L}{k} = \frac{\text{verklig värmeöverföring}}{\text{fiktivt fall med enbart ledning}}$$

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\text{rörelsemängdsdiffusivitet}}{\text{värmef diffusivitet}}$$

$$Re = \frac{\rho v L}{\mu} = \frac{\text{tröghetskrafter}}{\text{viskösa krafter}}$$

$$Gr = \frac{\beta g \rho^2 L^3 \Delta T}{\mu^2} = \frac{\text{lyftkraft}}{\text{friktionskraft}}$$



Studienämnden Kf / Kb

Sätt fysikalisk betydelse på samtliga termer i följande differentialekvationer

$$(1) \quad \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \nabla v \right) = \mu \nabla^2 v + \rho g - \nabla P$$

$$(2) \quad \rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v \nabla T \right) = k \nabla^2 T + \dot{q}$$

$$(3) \quad \frac{\partial C_A}{\partial t} + v \nabla C_A = D_{AB} \nabla^2 C_A + R_A$$

(1): ackumulation av rörelsemängd, strömning av RM
friktion, gravitation, produktion av RM

(2): ackumulation av värme, strömning av värme
ledning, produktion

(3): ackumulation, strömning, diffusion, produktion

(1) är en vektor medan (2) & (3) är skalärer

(1) beror på gravitationen

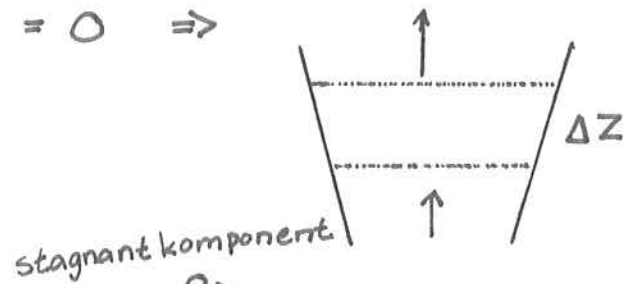


Studienämnden Kf / Kb

Härled en linjär koncentrationsprofil vid stationär masstransport i en diffusionscell med varierande tvärsnittsytta längs transportvägen!

$$\frac{N_{AZ} \cdot A|_{z+\Delta z} - N_{AZ} \cdot A|_z}{\Delta z} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{dN_{AZ}}{dz} = 0$$



$$N_{AZ} = -c D_{AB} \frac{dY_A}{dz} + Y_A (N_{AZ} + N_{BZ}) \Rightarrow$$

$$N_{AZ} = -\frac{c D_{AB}}{1 - Y_A} \frac{dY_A}{dz} \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dz} \left(-\frac{c D_{AB}}{1 - Y_A} \frac{dY_A}{dz} \cdot A(z) \right) = 0 \Rightarrow$$

$$-c D_{AB} \frac{d}{dz} \left(\frac{A(z)}{1 - Y_A} \frac{dY_A}{dz} \right) = 0$$

$$A(z) = 1 - Y_A \Rightarrow \frac{d^2 Y_A}{dz^2} = 0$$

$A(z)$ är alltså en rät linje



Studienämnden Kf / Kb

Vad är skillnaden mellan en normalspänning och en skjuvspänning? Vilken hör ihop med tryck respektive friktion?

○ Normalspänning = $\frac{\text{normalkraft}}{\text{yta}}$ N/m^2

○ Normalspänning verkar vinkelrät mot planet i normalens riktning - tryck

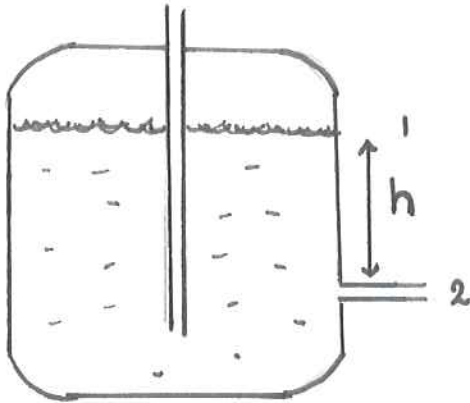
Skjuvspänning = $\tau_{yx} = \mu \frac{\partial v_x}{\partial y}$ N/m^2

Skjuvspänning verkar parallellt med ytan - friktion



Studienämnden Kf / Kb

Hur påverkas utflödet då vätskenivån sjunker i Mariotte's flaska?



$$P_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 = P_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2$$

$$P_1 = P_2 = P_{\text{atm}}$$

$$v_1 \text{ försumbar} \Rightarrow v_1 = 0$$

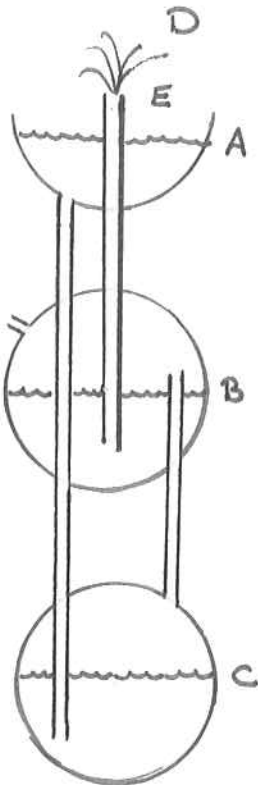
$$\Rightarrow v_2 = \sqrt{2gh}$$

Utflödet minskar då vätskenivån sjunker



Studienämnden Kf / Kb

Hur högt kan Herons fontän spruta?



$$\rho g h_{AC} = \rho g h_{DB} + \rho_e g h_{BC}$$

$$h_{DB} = h_{BE} + h_{DE} \rightarrow$$

$$\rho g h_{AC} = \rho g h_{BE} + \rho g h_{DE} + \rho_e g h_{BC}$$

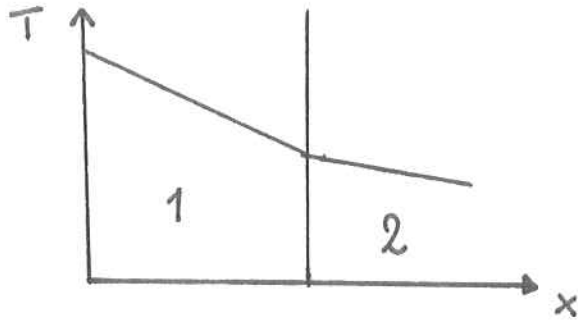
$$h_{DE} = \frac{\rho (h_{AC} - h_{BE}) - \rho_e h_{BC}}{\rho}$$

Höjden blir lägre i praktiken på grund av friktionsförluster i rören samt engångsförluster vid alla mynningar



Studienämnden Kf / Kb

Vilket material har lägst värmekonduktivitet?



Värmekonduktivitet är ett mått på hur bra ett material leder värme. Ju högre k ju planare temperaturprofil \Rightarrow

1 har lägre värmekonduktivitet



Studienämnden Kf / Kb

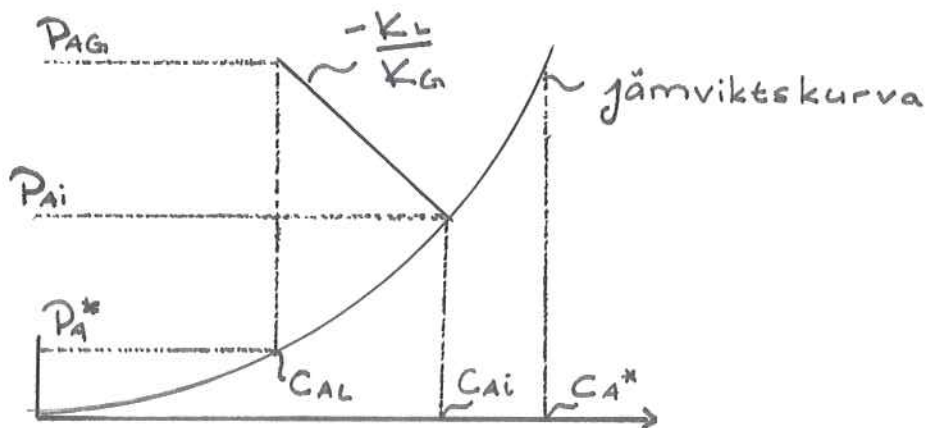
Ställ upp 4 ekvationer för massflux enligt tvåfilmsteorin. Definera tydligt ingående storheter!

$$N_{AZ} = k_G (P_{AG} - P_{Ai})$$
$$k_L (C_{Ai} - C_{AL})$$
$$K_G (P_{AG} - P_A^*)$$
$$K_L (C_A^* - C_{AL})$$

k_G - konvektiv massöverföringskoefficient i gasfas

k_L - konvektiv massöverföringskoefficient i vätskefas

K_G & K_L - total massöverföringskoefficient



C_{Ai} - koncentration av A i "interface"

P_{Ai} - partialtryck av A i "interface"

C_{AL} - koncentration av A i vätskefasen

P_{AG} - partialtryck av A i gasfasen

C_A^* - koncentration av A i jämvikt med P_{AG}

P_A^* - partialtryck av A i jämvikt med C_{AL}



Studienämnden Kf / Kb

- a, Varför är temperaturprofilen vid stationär ledning genom cylindriskt skal inte rät?

På grund av att arean ej är konstant, ty den varierar med radien

- b, Varför är koncentrationsprofilen vid stationär masstransport i en diffusionscell inte rät?

På grund av bulkbidraget

$$N_{Az} = -cD_{AB} \frac{dY_A}{dz} + Y_A(N_{Az} + N_{Bz})$$

Om enbart diffusion ägde rum hade profilen varit rät, men strömningen kröker profilen



Studienämnden Kf / Kb

Vid absorption av gaser kan 2 extremfall särskiljas

a, mycket löslig gas

b, svårlöslig gas

Vilket massöverföringsmotstånd dominerar i

respektive fall?

- m , proportionalitetskonstanten, storlek talar om hur mycket fasens motstånd beror av gasens löslighet. Då m är väldigt litet ligger det mesta av massöverföringens motstånd i gasfasen. Ett sådant system kallas gasfas kontrollerat och gäller för en mycket löslig gas. System med svårlöslig gas har ett stort värde på m . Då kan gasfasens motstånd försummas och $K_L = k_L$. Ett sådant system kallas för vätskefas kontrollerat.



Studienämnden Kf / Kb

En båt med ett tungt ankare ligger i en damm.
Vad händer med vattenytans läge då ankaret
kastats överbord?

Tyngdkraft = Lyftkraft

$$1, (m_b + m_a) \cdot g = V_1 \cdot \rho_v \cdot g \Rightarrow V_1 = \frac{m_b + m_a}{\rho_v}$$

$$2, m_b \cdot g = V \cdot \rho_v \cdot g \Rightarrow V_2 = V + V_a$$

Antagande :

$$m_a = 10 \text{ kg}$$

$$m_b = 1000 \text{ kg}$$

$$V_a = 1 \text{ dm}^3$$

$$\Rightarrow V_1 = 1.01 \text{ m}^3$$

$$V_2 = 1.001 \text{ m}^3$$

$$\rho_a > \rho_v \Rightarrow V_1 > V_2 \Rightarrow$$

Vattenytan sjunker

a = ankare b = båt v = vatten



Studienämnden Kf / Kb

Navier - Stokes ges av:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \mathbf{v} \right) = \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \mathbf{g} - \nabla P$$

Hur förenklas ekvationen för:

- a, ideal strömning (friktionsfri)
- b, låga värden på Reynolds tal
- c, stationär strömning

$$a - \mu \nabla^2 \mathbf{v} = 0$$

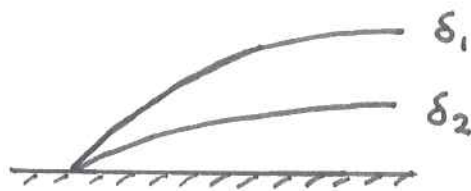
$$b - \mathbf{v} \nabla \mathbf{v} = 0$$

$$c - \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0$$



Studienämnden Kf / Kb

Vad menas med gränsskikt för rörelsemängd respektive värme? Vilket av följande gränsskikt beskriver värmen om den andra beskriver laminär strömning och då $Pr = 0.1$?



Det är en gräns mellan störd och ostörd strömning, det vill säga då T eller V är 99% av T_∞ och V_∞ .

$$Pr = \frac{\text{rörelsemängdstransport}}{\text{värmetransport}} = 0.1$$

då $Pr = 0.1$ dominerar värmetransporten

$\Rightarrow \delta_1 =$ värmegränsskikt

$\delta_2 =$ rörelsemängdsgränsskikt



Studienämnden Kf / Kb

Ge relevanta uttryck för naturlig respektive påtvingad mass och värmetransport

Värme

$$\text{Flux: } \frac{q}{A} = h \Delta T$$

$$\text{Dimensionslöst tal: } Nu = \frac{h \cdot L}{k}$$

$$\text{Naturlig: } Nu = Nu(Gr, Pr)$$

$$\text{Påtvingad: } Nu = Nu(Re, Pr)$$

Massa

$$\text{Flux: } N_A = k_c \Delta C$$

$$\text{Dimensionslöst tal: } Nu_{AB} = \frac{k_c \cdot L}{D_{AB}}$$

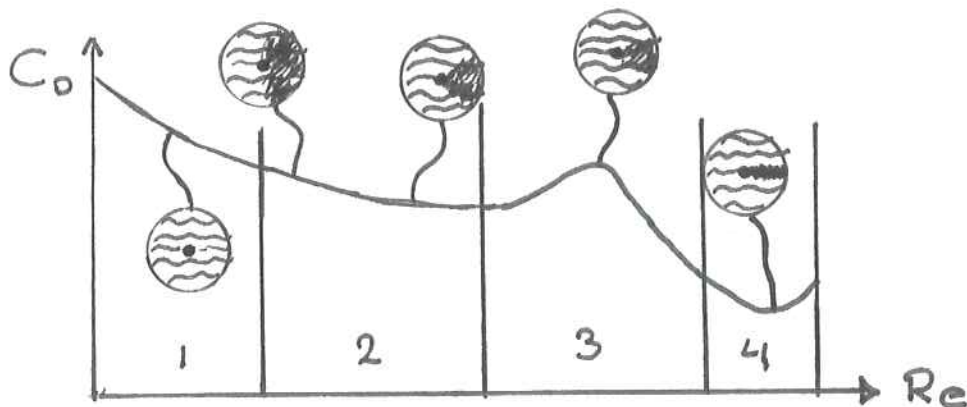
$$\text{Naturlig: } Nu_{AB} = Nu_{AB}(Gr_{AB}, Sc)$$

$$\text{Påtvingad: } Nu_{AB} = Nu_{AB}(Re, Sc)$$



Studienämnden Kf / Kb

Motståndskoefficientens beroende av Re för strömning runt en cylinder kan indelas i 4 delområden. Beskriv kurvans utseende och strömbilden i dessa intervall

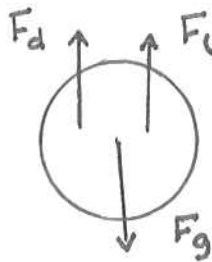


- 1: Laminärt $Re < 1$, viskösa krafter dominerar symmetriskt mellan fram- & baksida, inga oscillationer
- 2: $1 < Re < E^3$, små virvlar, separation
- 3: $E^3 < Re < 5E^5$, separation vid $\theta \approx 80^\circ$
små instationära virvlar, $C_D \approx 1$
- 4: $5E^5 < Re$, $C_D \rightarrow 0,3$, separation vid $\theta > 90^\circ$,
turbulent gränsskikt

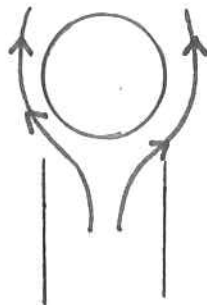


Studienämnden Kf / Kb

- a, En flirtkula kan fås att balansera på luftströmmen från ett sugrör. Vilka krafter balanserar i det stationära tillståndet?



- b, Förklara kulans stabilitet i sidled!

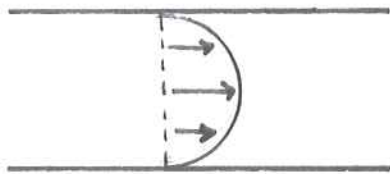


Trycket är lika på alla sidor då inga yttre störningar förekommer. Om kulan flyttas i sidled ökar strömmen på andra sidan. Detta ger en tryckminskning \Rightarrow kulan åker tillbaka till jämviktsläget



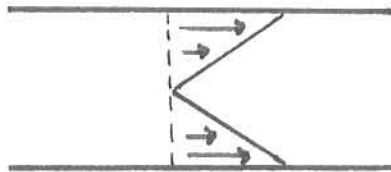
Studienämnden Kf / Kb

Skissera hastighets- och skjuvspänningsprofilen vid laminär rörströmning!



hastighetsprofil

V_{max} i mitten



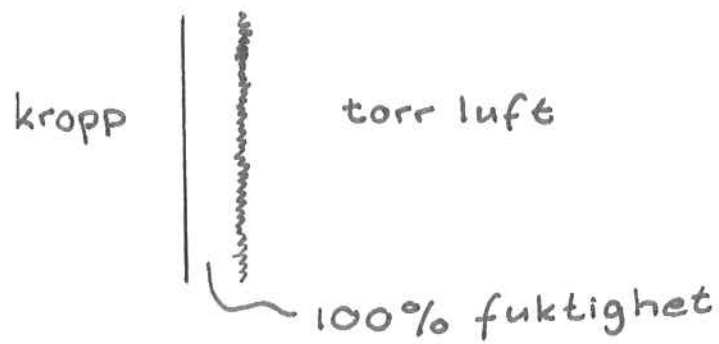
Skjuvspänningsprofil

τ_{max} vid väggen



Studienämnden Kf / Kb

Varför fryser när man är blöt?

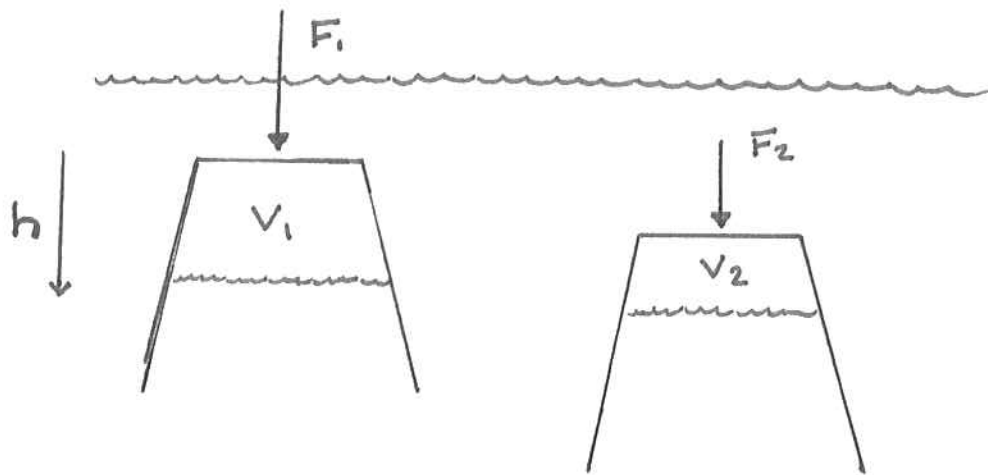


Avdunstning av vatten från kroppen till luften på grund av koncentrationsskillnad. Vatten kommer avdunsta och kommer ta värme från kroppen



Studienämnden Kf / Kb

Om man tar ett glas, vänder det uppoch ner och stick ner det under vatten så att en luftvolym stängs inne. Då måste man utöva en viss kraft på glaset så att det inte flyter upp. Hur ändras denna kraft om man för ner glaset djupare under ytan?



$$F = F_c - mg$$

då h ökar ökar trycket enligt ρgh .
vid högre tryck minskar luftvolymen
om V minskar minskar $F_c \Rightarrow F$ minskar

Krävs mindre kraft att hålla glaset under
ytan ju djupare glaset är



Studienämnden Kf / Kb

Vid torkning av partikulärt material används ofta Biot's tal. Diskutera värmeöverföringen mellan partikeln och torkmediet för fallen

$Bi \ll 1$ $Bi = 1$ $Bi \gg 1$

$$Bi = \frac{hL}{k} = \frac{\text{konduktivt motstånd}}{\text{konvektivt motstånd}} = \frac{\text{inre motstånd}}{\text{yttre motstånd}}$$

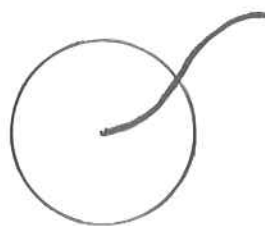
$Bi \ll 1$: yttre motstånd dominerar

$Bi = 1$: båda motstånden är viktiga

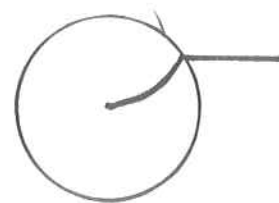
$Bi \gg 1$: inre motstånd dominerar



$Bi \ll 1$



$Bi = 1$



$Bi \gg 1$



Studienämnden Kf / Kb

I figuren visas koncentrationsprofilerna på gas och vätskesidan enligt tvåfilmsteorin

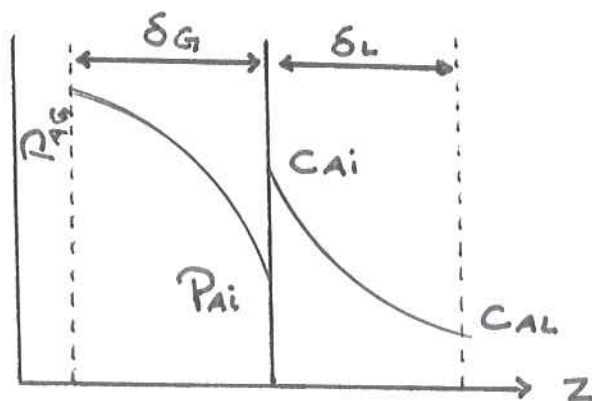
a, åt vilket håll sker masstransporten?

b, varför är profilen diskontinuerlig i fasgränssytan?

c, hur kan massöverföringskoefficienten beräknas om filmtjockleken är känd?

d, För att förbättra massöverföringen vid absorption av en gas tillsättes kemikalier i vätskan som ökade gasens löslighet.

Låg massöverföringsmotståndet ursprungligen i gasfasen eller i vätskefasen?



a - gas \rightarrow vätska $P_{AG} > C_{AL}$

b - jämvikt i gränssytan

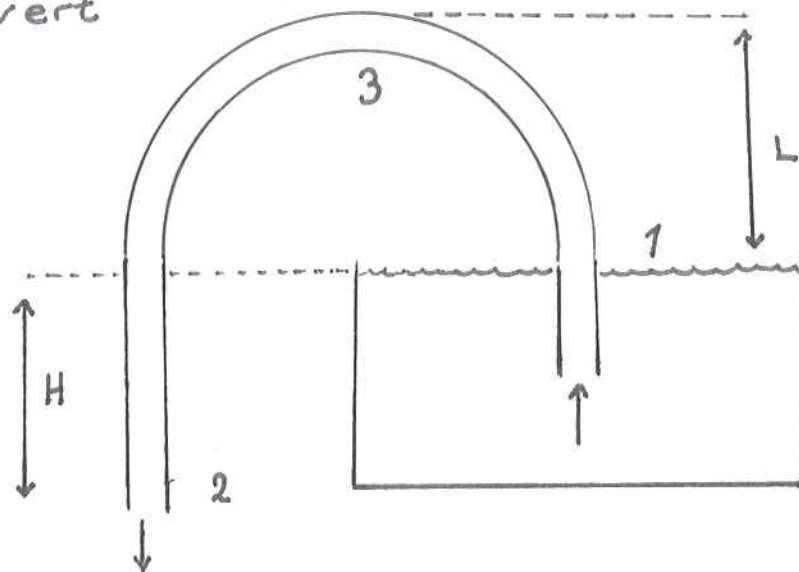
c - $k_c = \frac{D_{AB}}{\delta}$

d - Vätskesidan. Man förändrar den del som utgör problemet



Studienämnden Kf / Kb

Vid tömning av ett akvarium används ibland en hävert



a, Härled ett uttryck för utloppshastigheten v_2 !

b, Vad är trycket i 3?

$$a - \text{Bernoulli: } \gamma_1 g + \frac{v_1^2}{2} + \frac{P_1}{\rho} = \gamma_2 g + \frac{v_2^2}{2} + \frac{P_2}{\rho}$$

$$P_1 = P_2, v_1 \approx 0 \quad \Delta Y = H \Rightarrow v_2 = \sqrt{2gH}$$

$$b - \text{Bernoulli: } \gamma_1 g + \frac{v_1^2}{2} + \frac{P_1}{\rho} = \gamma_3 g + \frac{v_3^2}{2} + \frac{P_3}{\rho}$$

$$P_1 = 1 \text{ atm}, v_1 \approx 0 \quad \Delta Y = L \quad v_3 = v_2$$

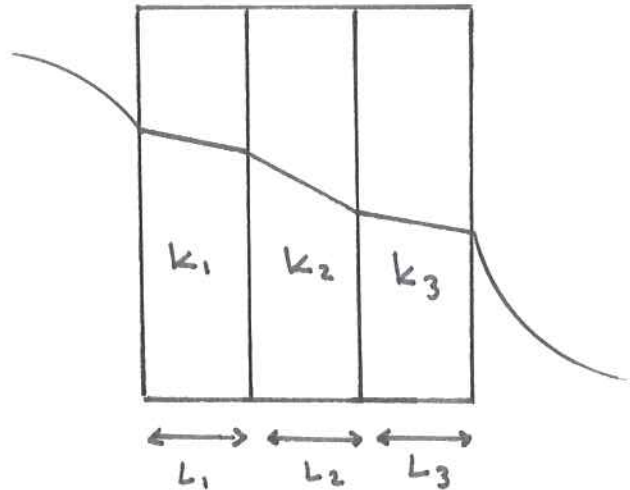
$$\Rightarrow P_3 = \rho g L - \frac{\rho}{2} \sqrt{2gH}^2 + P_1$$

$$\Rightarrow P_3 = \rho g(L-H) + P_1$$



Studienämnden Kf / Kb

Hur ser den totala värmeöverföringskoefficienten för en vägg som består av 3 skikt



$$U = \frac{1}{\frac{1}{h_i} + \frac{L_1}{k_1} + \frac{L_2}{k_2} + \frac{L_3}{k_3} + \frac{1}{h_o}}$$



Studienämnden Kf / Kb

Om man sätter tummen över övre öppningen på ett fullt sugrör med vatten rinner ingenting ut. Hur långt kan, teoretiskt, ett rör maximalt vara utan att vattnet rinner ut?

$$\text{Bernoulli: } \gamma_1 g + \frac{v_1^2}{2} + \frac{P_1}{\rho} = \gamma_2 g + \frac{v_2^2}{2} + \frac{P_2}{\rho}$$

$$v_1 = v_2 = 0$$

$$\Delta P = \rho g \Delta Y$$

$$\Delta P = 0 - P_{\text{atm}}$$

$$\Delta Y = 0 - Y_{\text{max}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \Delta P = 0 - P_{\text{atm}} \\ \Delta Y = 0 - Y_{\text{max}} \end{array} \right\} \Rightarrow Y_{\text{max}} \approx 10 \text{ m}$$



Studienämnden Kf / Kb

Vilka krafter balanserar vid följande stationära strömningsfall?

a, Fallande kropp

b, Horizontell laminär rörströmning

c, Vertikal, laminär strömning i porös bädd (utan pålagt tryck)

a - Tyngdkraft, formmotstånd, lyftkraft

$$F_g = mg \quad F_m = \frac{C_D A_p \rho v^2}{2} \quad F_l = \rho V g$$

$$F_g = F_m + F_l$$

b - Friktionskraft, tryckkraft

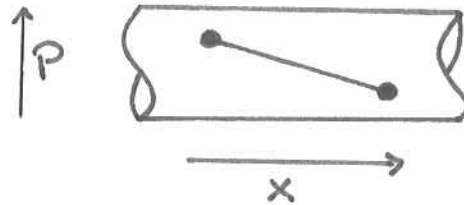
$$\sum F_x = \tau_{yx} \Delta x \Big|_{y+\Delta y} - \tau_{yx} \Delta x \Big|_y + P \Delta y \Big|_x - P \Delta y \Big|_{x+\Delta x} = 0$$

c - Friktion, tyngdkraft



Studienämnden Kf / Kb

a, I ett fall med laminär horisontell rörströmning var $\frac{dP}{dx} > 0$. Åt vilket håll strömmar det?



Strömning sker från högt tryck till lågt
Strömmen går från vänster till höger

b, En sfärisk partikel faller i en vätska. Om man befinner sig i Stokes område där $C_D = 24/Re$ och viskositeten fördubblas, hur förändras då den maximala fallhastigheten

$$F_g = F_c + F_m \Rightarrow$$

$$mg = \rho V g + C_D A_p \rho \frac{v^2}{2}$$

$$C_D = \frac{24 \mu}{v D \rho}$$

$$\Rightarrow v = \frac{g(m - \rho V) \cdot D}{12 A_p \mu}$$

$$v \propto \frac{1}{\mu}$$

Om μ halveras dubblas hastigheten
och tvärt om



Studienämnden Kf / Kb

Visa att $Nu = 2$ för fallet med enbart värmeledning från en sfär till en stor stillastående fluidvolym. Antag att temperaturen på ytan av sfären ($r=R$) är T_R och temperaturen långt ifrån ($r=\infty$) är T_∞

Ledning: $q A^{-1} = -k \frac{dT}{dr}$ $Nu = \frac{hD}{k}$

$$\int q \cdot (4\pi r^2)^{-1} dr = \int -k dT$$

$$\Rightarrow q = 4\pi R^2 \frac{k}{R} (T_R - T_\infty) = A \cdot \frac{k}{R} \Delta T$$

$$q = h \cdot A \cdot \Delta T \quad \Rightarrow \quad h = \frac{k}{R}$$

$$Nu = \frac{k}{R} \cdot \frac{1}{k} \cdot 2R = 2$$



Studienämnden Kf / Kb

Vad menas med diffusion genom stagnant komponent?
Ställ upp ett uttryck för massfluxet! Beskriv
i detalj transporten av A och B

Fick's lag i 1-dimension: $N_{Az} = -cD_{AB} \frac{dY_A}{dz} + Y_A(N_{Az} + N_{Bz})$

Om B olöslig i A $\Rightarrow N_{Bz} = 0$

B stagnant $\Rightarrow N_{Az} = -\frac{cD_{AB}}{1-Y_A} \frac{dY_A}{dz}$

När ett ämne A transporteras så drar det med sig
molekyler av ämne B. Detta ger upphov till
en koncentrationsgradient så att ämne B
diffunderar i motsatt riktning. Dessa två
mekanismer balanserar varandra



Studienämnden Kf / Kb

När man sätter på en vattenkran ser man att strålen blir smalare längre ner. Varför?

$$q = A \cdot v$$

q är konstant genom hela strålen

v ökar eftersom den påverkas av gravitationen

$$\frac{mv^2}{2} = mgh \Rightarrow v = (2gh)^{1/2}$$

Om q är konstant och v ökar måste A minska

\Rightarrow strålen blir smalare längre ner!



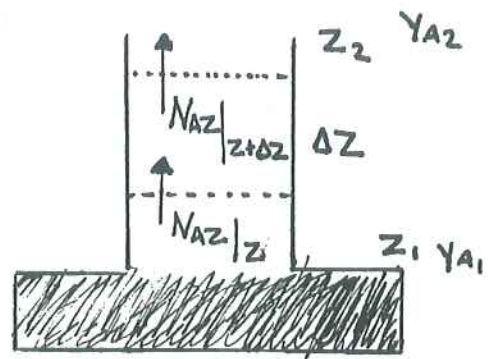
Studienämnden Kf / Kb

Arnoldcell

$$N_{AZ} = -cD_{AB} \frac{dY_A}{dz} + Y_A(N_{AZ} + N_{BZ})$$

Stagnant gas: $N_{BZ} = 0$

$$\Rightarrow N_{AZ} = -\frac{cD_{AB}}{1-Y_A} \frac{dY_A}{dz}$$



$$\frac{dN_{AZ}}{dz} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dz} \left(-\frac{cD_{AB}}{1-Y_A} \frac{dY_A}{dz} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{cD_{AB}}{1-Y_A} \frac{dY_A}{dz} + C_1 = 0$$

$$C_1 dz = -\frac{1}{1-Y_A} dY_A \quad \Rightarrow \quad C_1 z = \ln(1-Y_A) + C_2$$

Gränser: $z_1 \rightarrow z_2 \quad Y_{A1} \rightarrow Y_{A2}$

$$\Rightarrow \frac{(1-Y_{A2})}{(1-Y_{A1})} = \left(\frac{1-Y_{A2}}{1-Y_{A1}} \right)^{\left(\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \right)}$$



Studienämnden Kf / Kb

Hastighetsprofil vid fullt utvecklad laminär strömning nedför ett lutande plan

$$\text{Rörelsemängdsbalans: } \sum F_x = \iint_{CS} v_x \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA + \frac{d}{dt} \iiint_{CV} \rho v_x dV$$

(1) $in = ut$

(2) fullt utvecklad strömning

$$\sum F_x = \underbrace{\rho \Delta y \Big|_x - \rho \Delta y \Big|_{x+\Delta x}}_{(2)} + \tau_{yx} \Delta x \Big|_y - \tau_{yx} \Delta x \Big|_{y+\Delta y} + \rho g \Delta x \Delta y \sin \theta$$

$$\text{Dividera med } \Delta x \Delta y \Rightarrow -\frac{d\tau_{yx}}{dy} - \rho g \sin \theta = 0$$

$$\text{Integration} \Rightarrow \tau_{yx} = C_1 - \rho g y \sin \theta$$

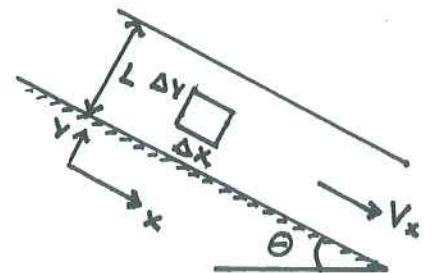
$$\tau_{yx}(L) = 0 \Rightarrow C_1 = \rho g L \sin \theta$$

$$\tau_{yx} = \rho g (L - y) \sin \theta = \mu \frac{dv_x}{dy}$$

$$\text{Integration} \Rightarrow v_x = \frac{\rho g}{\mu} \left(Ly - \frac{y^2}{2} \right) \sin \theta + C_2$$

$$v_x(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$v_x = \frac{\rho g}{\mu} \left(Ly - \frac{y^2}{2} \right) \sin \theta$$





Studienämnden Kf / Kb

Hastighetsprofil i rör med axel



rörelsemängdsbalans: $\Sigma F_x = \iint_{CS} \rho v_x (v \cdot \vec{n}) dA + \frac{d}{dt} \iiint_{CV} \rho v_x dV$

(1) $in = out$

(2) fullt utvecklade strömning

Endast friktionsförluster \Rightarrow

$$\Sigma F_x = \tau_{rx} (2\pi r \Delta x) \Big|_{r+\Delta r} - \tau_{rx} (2\pi r \Delta x) \Big|_r = 0$$

Dividera med $2\pi \Delta x \Delta r$

$$\Rightarrow \frac{d}{dr} (r \tau_{rx}) = 0 = \frac{d}{dr} (r \mu \frac{dv_x}{dr})$$

Integration $\Rightarrow r \mu \frac{dv_x}{dr} + C_1 = 0 \Rightarrow dv_x = -\frac{C_1}{\mu} \frac{dr}{r}$

Integration $\Rightarrow v_x = -\frac{C_1}{\mu} \ln(r) + C_2$

$v_x(R_2) = 0 \Rightarrow C_2 = -\frac{C_1}{\mu} \ln(R_2)$

$v_x(R_1) = v \Rightarrow v = \frac{C_1}{\mu} \ln(R_1) - \frac{C_1}{\mu} \ln(R_2) = \frac{C_1}{\mu} \left(\ln \frac{R_1}{R_2} \right)$

$$\Rightarrow \frac{C_1}{\mu} = \frac{v}{\ln \frac{R_1}{R_2}}$$

$$\Rightarrow v_x(r) = v \frac{\ln(r/R_2)}{\ln(R_1/R_2)}$$

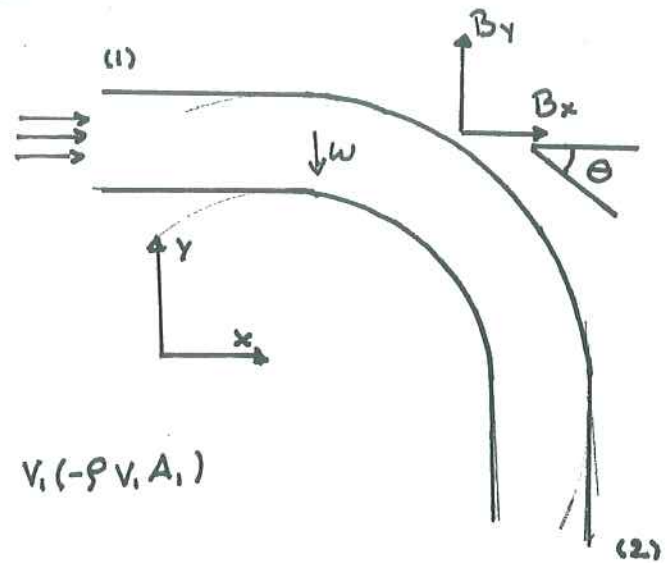


Studienämnden Kf / Kb

kraftkomponenter i en rörböj

$$\Sigma F_x = P_1 A_1 - P_2 A_2 \cos \theta + B_x$$

$$\Sigma F_y = P_2 A_2 \sin \theta - \omega + B_y$$



$$\iint_{CS} v_x \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA = (v_2 \cos \theta) (\rho v_2 A_2) + v_1 (-\rho v_1 A_1)$$

$$\iint_{CS} v_y \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA = (-v_2 \sin \theta) (\rho v_2 A_2)$$

fullt utvecklade strömning $\Rightarrow \frac{d}{dt} \iiint_{CV} = 0$

$$P_1 A_1 - P_2 A_2 \cos \theta + B_x = (v_2 \cos \theta) (\rho v_2 A_2) + v_1 (-\rho v_1 A_1)$$

$$P_2 A_2 \sin \theta - \omega + B_y = (-v_2 \sin \theta) (\rho v_2 A_2)$$

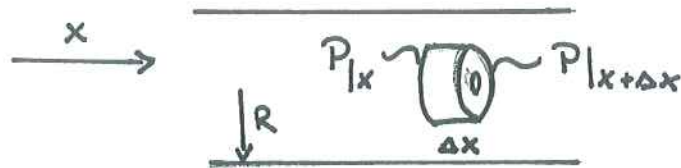
$$B_x = v_2^2 \rho A_2 \cos \theta - v_1^2 \rho A_1 - P_1 A_1 + P_2 A_2 \cos \theta$$

$$B_y = -v_2^2 \rho A_2 \sin \theta - P_2 A_2 \sin \theta + \omega$$



Studienämnden Kf / Kb

Hastighetsprofil vid fullt utvecklad, horisontell, laminär rörströmning



Rörelsemängdsbalans: $\sum F_x = \iint_{CS} \rho v_x (v \cdot n) dA + \frac{d}{dt} \iiint_{CV} \rho v_x dV$

(1) $in = ut$

(2) fullt utvecklad strömning

$$\sum F_x = P 2\pi r \Delta r \Big|_x - P 2\pi r \Delta r \Big|_{x+\Delta x} + \tau_{rx} 2\pi r \Delta x \Big|_{r+\Delta r} - \tau_{rx} 2\pi r \Delta x \Big|_r$$

dividera med $2\pi r \Delta r \Delta x$

$$\Rightarrow -r \frac{dP}{dx} + \frac{d}{dr} (r \tau_{rx}) = 0$$

integration $\Rightarrow \tau_{rx} r = \frac{dP}{dx} \frac{r^2}{2} + C_1 \Rightarrow \tau_{rx} = \frac{dP}{dx} \frac{r}{2} + \frac{C_1}{r}$

C_1 måste vara noll

för att undvika att $\frac{C_1}{r} \rightarrow \infty$

$$\tau_{rx} = \mu \frac{dv_x}{dr} \Rightarrow \mu \frac{dv_x}{dr} = \frac{dP}{dx} \frac{r}{2}$$

integration $\Rightarrow v_x = \frac{dP}{dx} \frac{1}{4\mu} \frac{r^2}{2} + C_2$

$v_x(R) = 0 \Rightarrow C_2 = \frac{1}{4\mu} \frac{dP}{dx} R^2$

$$\Rightarrow v_x = \frac{dP}{dx} \frac{1}{4\mu} (r^2 - R^2)$$



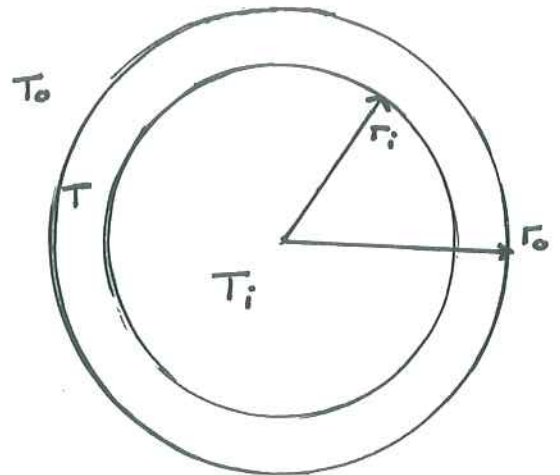
Studienämnden Kf / Kb

Medelarea för stationär värmeledning genom cylindriskt skal

$$q = \frac{k \bar{A} \Delta T}{r_o - r_i}$$

$$q = -k A \frac{dT}{dr} \quad A = 2\pi r L$$

integrering $r_i \rightarrow r_o$
 $T_i \rightarrow T_o$ $q = \text{konstant}$



$$\ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right) = -\frac{2\pi L k (T_o - T_i)}{q}$$

$$\Rightarrow q = \frac{2\pi L k (T_i - T_o)}{\ln(r_o/r_i)} = \frac{2\pi L k (T_i - T_o) (r_o - r_i)}{\ln(r_o/r_i) (r_o - r_i)} = \frac{k \bar{A} \Delta T}{r_o - r_i}$$

$$\Rightarrow \bar{A} = \frac{2\pi L (r_o - r_i)}{\ln(r_o/r_i)}$$

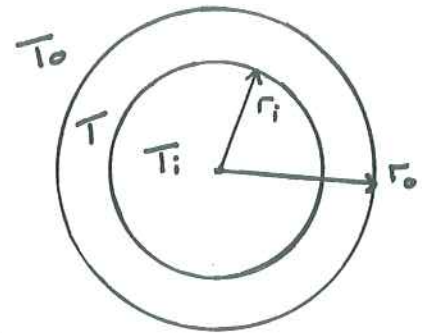


Studienämnden Kf / Kb

Temperaturprofil i cylindriskt skal

$$q = kA \frac{dT}{dr} \quad A = 2\pi r L$$

$$\Rightarrow \frac{q}{L} = \frac{2\pi k}{\ln(r_o/r_i)} (T_i - T_o)$$



Akkumulation = in - ut + producerat

$$\Rightarrow \frac{dq}{dr} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dr} \left(\frac{r dT}{dr} \right) = 0 \quad \text{enligt definition}$$

$$\text{integration} \Rightarrow r \frac{dT}{dr} = -C_1 \Rightarrow T = -C_1 \ln(r) + C_2$$

$$T(r_i) = T_i \Rightarrow C_2 = T_i + C_1 \ln(r_i)$$

$$T(r_o) = T_o \Rightarrow C_1 = \frac{T_o - T_i}{\ln(r_i/r_o)}$$

$$\Rightarrow T = \frac{T_o - T_i}{\ln(r_o/r_i)} \ln(r) + T_i + \frac{T_o - T_i}{\ln(r_o/r_i)} \ln(r_i)$$

$$\Rightarrow T = T_i + \frac{T_o - T_i}{\ln(r_o/r_i)} \ln(r/r_i)$$