Studentskrivna Föreläsningsanteckningar från

Transportprocesser

Skrivna av Jonas Elmwall (Student på Bioteknik) 2008

Transportprocesser Anteckningar

F1: 2008-10-27 — Rörelsemängds-transport

Introduktion

Transport mellan	Enhetsoperation
Ånga - vätska	Destillation
Gas - vätska	Adsorption
Gas - fast fas	Torkning & adsorption
Vätska - vätska	Extraktion
Vätska - fast fas	Lakning, adsorption

Fluider

Omfattar gaser och vätskor.

"A solid has a volume and shape

A liquid has a volume and no shape

A gas has neither"

En fluid deformeras kontinuerligt under påverkan av skjuvkraft.

Normal- och skjuvkraft

ΔF_n Normalkraft - i tryck

ΔF_s Tangentiell kraft - i skjuvning och friktion

(Normalkraft och tangentiell kraft: Ytkrafter)

Tyngdkraft - volymskraft

Spänning (stress): Kraft/yta $[N/m^2]$

$$\lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_n}{\Delta A} = \sigma_{ii} \quad \text{- Normalspänning}$$

(1:a, 2:a index)

$$\lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_s}{\Delta A} = \tau_{ij} \quad \text{- Skjuvspänning}$$

Index: 1:a för planets riktning
2:a för kraftens riktning

Normalspänningen är riktningsoberoende vid stillastående fluid.

$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma \implies$ Skalär storhet

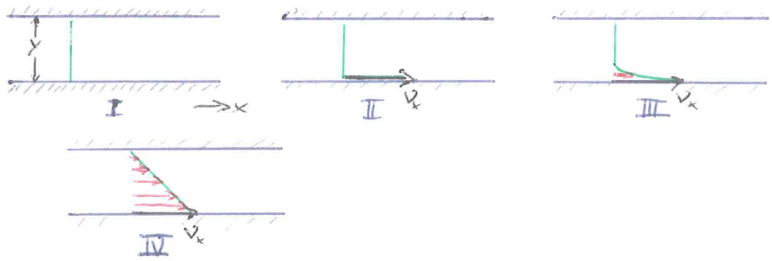
$P = -\sigma$

Vid strömmande system gäller likheten ej!

$\sigma_{xx} \neq \sigma_{yy} \neq \sigma_{zz}$

$P = -\frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})$ (genomsnittlig σ)

No slip = Relativ hastighet mellan fluid och fast yta = 0



Hur stor kraft?

$$\frac{F}{A} \propto \frac{V_x}{Y} \implies \frac{F}{A} = \mu \frac{V_x}{Y}$$

μ: viskositet $[Ns/m^2]$

$$\tau = \mu \frac{\partial v_x}{\partial Y}$$

Några begrepp

Ideal: $\mu = 0$

Verklig: $\mu \neq 0$

Newtonsk: μ = konstant

Icke Newtonsk: μ varierar

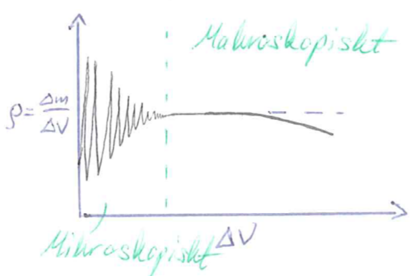
Inkompressibel: ρ = konstant

Kompressibel: ρ ej konstant

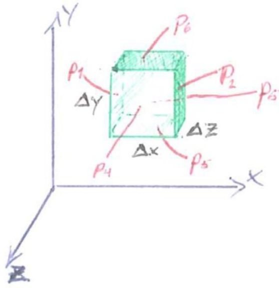
Stationär: Icke tidsberoende

Instationär: Tidsberoende

Kontinuumhypotesen: Makroskopiska egenskaper hos en fluid varierar kontinuerligt, till skillnad från mikroskopiska.



F2: 2008-10-28



Statisk tryckfördelning

$$\rho\vec{g}(\Delta x\Delta y\Delta z) + (p|_x - p|_{x+\Delta x})\Delta y\Delta z\,\vec{e}_x + (p|_y - p|_{y+\Delta y})\Delta x\Delta z\,\vec{e}_y + (p|_z - p|_{z+\Delta z})\Delta x\Delta y\,\vec{e}_z = 0$$

Dela med $\Delta x\Delta y\Delta z$

$$\Longrightarrow \rho\vec{g} + \frac{p|_x - p|_{x+\Delta x}}{\Delta x}\vec{e}_x + \frac{p|_y - p|_{y+\Delta y}}{\Delta y}\vec{e}_y + \frac{p|_z - p|_{z+\Delta z}}{\Delta z}\vec{e}_z = 0$$

Låt Δx, Δy och Δz gå mot 0.

$$\Longrightarrow \rho\vec{g} - \frac{\partial p}{\partial x}\vec{e}_x - \frac{\partial p}{\partial y}e_y - \frac{\partial p}{\partial z}\vec{e}_z = 0 \Longrightarrow \boxed{\rho\vec{g} = \nabla p}$$

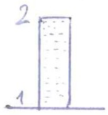
I en dimension vertikalt

$\downarrow \vec{g}$ $\uparrow$

$$-\rho g\vec{e}_y = \frac{dp}{dy}\vec{e}_y \Longrightarrow -\rho g\int_{y_1}^{y_2} dy = \int_{p_1}^{p_2} dp \Longrightarrow -\rho g(y_2 - y_1) = p_2 - p_1$$

$$\Longrightarrow p_1 = p_2 + \rho g(y_2 - y_1) \Longrightarrow \boxed{p_1 = p_2 + \rho g h}$$

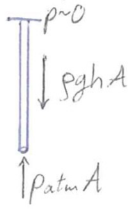
Ex. Höghus



$h = 100$ m, $\Delta p = \rho g h$

$\Delta p = 1 \cdot 10 \cdot 100 = 1000$ Pa $\quad$ (1 bar $= 10^5$ Pa)

Ex. Sugrör



Kraftbalans: $\rho g h \cancel{A} = p_{atm}\cancel{A}$

Hur långt sugrör?

$$h = \frac{10^5}{10^3 \cdot 10}$$

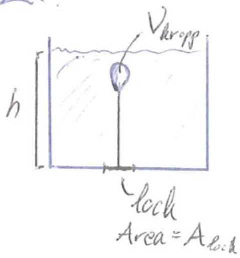
Generalisering: 1-dimensionell vertikal tryckfördelning

Idealgas: $\rho = \frac{pM}{RT} \xrightarrow[\text{Integrering}]{} \frac{p}{p_0} = e^{-\frac{Mg}{RT}y}$

Lyftkraft (buoyancy)

Nettokraft på nedsänkt kropp verkar uppåt. Horisontella kraft-komposanter balanseras $\Rightarrow$ Endast y-riktning (vertikal-) är intressant.

Ex.



$F_{upp} = (\rho_{H_2O} - \rho_{kropp}) g V_{kropp}$

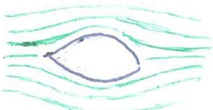
$F_{ned} = \rho_{H_2O} g h A_{lock}$

Kraftbalans: $F_{upp} = F_{ned}$

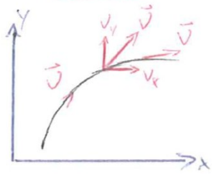
$\Rightarrow \underbrace{(\rho_{H_2O} - \rho_{kropp})}_{\approx \rho_{H_2O}} \cancel{g} V_{kropp} = \rho_{H_2O} \cancel{g} h A_{lock}$

$(\Rightarrow V_{kropp} = h A_{lock})$

Strömning



Strömlinjer = tangent till hastighetsvektorn i varje punkt.



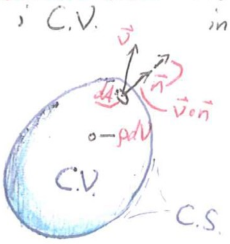
$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_y}{v_x}$$

Stationär strömning: Flödet i varje punkt är oberoende av tiden.

Kontrollvolym: Område i rymden genom vilket strömning sker.

Ackumulation i C.V. = Nettoflöde in över C.S. + Nettoproduktion i C.V.

C.V. = Control Volume
C.S. = Control Surface



Massbalans

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{C.V.} \rho\, dV = -\iint_{C.S.} \rho(\vec{v}\cdot\vec{n})\, dA}$$

ackumulation   nettoflöde in

$(\vec{v}\cdot\vec{n})dA$ = flöde ($\frac{m^3}{s}$)

F3: 2008-10-30

Kontrollvolymsmetoden: Rörelsemängd (rm.)

Rörelsemängd $= m\vec{v}$

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{C.V.}\rho\vec{v}\,dV}_{m\vec{v}} = -\iint_{C.S.}\vec{v}\,\overbrace{\rho(\vec{v}\cdot\vec{n})\,dA}^{massa/tid} + \Sigma\vec{F}, \qquad \vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) \text{ Newtons 2:a lag}$$

Ackumulation av rm. — Nettoflöde in av rm. — Produktion av rm.

Ex. Rörböj, stationärt

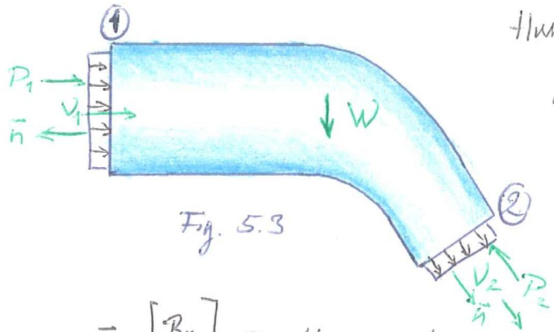
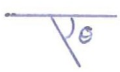


Fig. 5.3

Hur stor kraft utövar böjen på den strömmande vätskan?



$\vec{B} = \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \end{bmatrix}$ Resulterande kraften av röret på ~~...~~ fluiden.

$$\Sigma\vec{F} = \iint_{C.S.}\vec{v}\rho(\vec{v}\cdot\vec{n})\,dA + \cancel{\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{C.V.}\rho\vec{v}\,dV}^{=0,\ stationärt}$$

$$\Sigma\vec{F}_x = \iint_{C.S.} v_x\rho(\vec{v}\cdot\vec{n})\,dA \quad (*)$$

x-riktning: $\underbrace{B_x + p_1A_1 - p_2A_2\cos\theta}_{=\Sigma\vec{F}} = \underbrace{v_1(-\rho_1 v_1 A) + (v_2\cos\theta)(\rho_2 v_2 A_2)}_{Av\ (*)}$

y-riktning: $B_y + p_2A_2\sin\theta - W = 0 + (-v_2\sin\theta)(\rho_2 v_2 A_2)$

Kraft som den strömmande vätskan utövar på böjen: $\vec{R} = -\vec{B}$

5

Energibalans

$$\frac{\delta Q}{dt} - \frac{\delta W_s}{dt} = \iint_{C.S.} \left(e + \frac{P}{\rho}\right)\rho(\vec{v}\cdot\vec{n})\,dA + \frac{\partial}{\partial t}\iiint_{C.V.} e\rho\,dV + \frac{\delta W_\mu}{dt}$$

Värme från omgivningen per tidsenhet

Arbete på omgivningen per tidsenhet

Strömning (ut-in) av energi per tidsenhet

Ackumulation av energi per tidsenhet

Arbete för att övervinna viskösa krafter

$$e = gy + \frac{v^2}{2} + u$$

potentiell, kinetisk, inre

energi/massenhet

Specialfall: Bernoullis ekvation, balans för mekanisk energi.

Antaganden: Stationärt ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$), inkompressibelt ($\rho$ konst.), idealt ($\mu = 0 \Longrightarrow \frac{\delta W_\mu}{dt} = 0$), inget värmeutbyte ($\frac{\delta Q}{dt} = 0$), inget arbete ($\frac{\delta W_s}{dt} = 0$) och u = konst.

Balans på strömrör:

Fig 6.8

Förenklingar ger av energibalansen:

$$\iint_{C.S.} \left(e + \frac{P}{\rho}\right)\rho(\vec{v}\cdot\vec{n})\,dA = 0:$$

$$\left(gy_1 + \frac{v_1^2}{2} + u_1 + \frac{P_1}{\rho}\right)(-\rho v_1 A_1) =$$

$$= \left(gy_2 + \frac{v_2^2}{2} + u_2 + \frac{P_2}{\rho}\right)(-\rho v_2 A_2)$$

Då $u_1 = u_2$ och $\rho v_1 A_1 = \rho v_2 A_2$ (massbalans):

$$\boxed{gy + \frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} = \text{konstant}}$$

Energi/massa

Potentiell energi, Kinetisk energi, Tryck

Bernoullis ekvation

Ex.

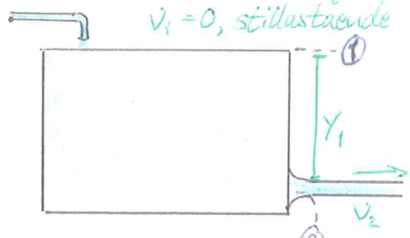


Fig 6.9

Utströmning ur tank.

Beräkna utflödeshastigheten v_2.

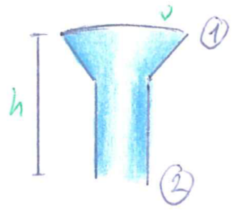
Hur väljs punkterna 1 och 2?

1. Där information finns tillgänglig
2. Där information söks. Approximativt

$$gY_1 + 0 + \frac{\cancel{P_{atm}}}{\cancel{\rho}} = 0 + \frac{v_2^2}{2} + \frac{\cancel{P_{atm}}}{\cancel{\rho}}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_2 = \sqrt{2gY}}$$

F4: 2008-10-31



$v_2 = \sqrt{2gh}$

Stationärt tillstånd:

$\frac{F}{A} = \mu \frac{v}{Y}$, μ = viskositet (dynamisk) [Pa s]

$\mu_{H_2O} \sim 10^{-3}$

$\mu_{luft} \sim 1{,}8 \cdot 10^{-5}$

$\lim_{Y \to 0} \tau_{yx} = \mu \frac{\partial v_x}{\partial y}$ [N/m²], Skjuvspänning

Normal-riktning

Kraftens riktning

μ oberoende av tryck.

$\nu = \frac{\mu}{\rho}$ $\left[\frac{m^2}{s}\right]$, Kinematisk viskositet

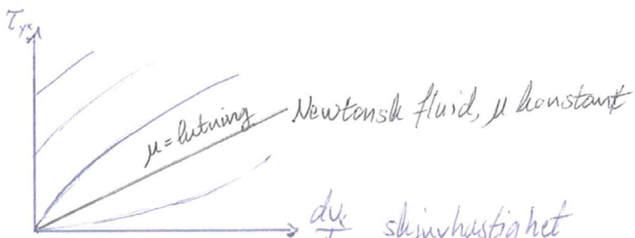


Fig 7.3

7

Vektorvärdighet

Skalär: Ett värde T, c

Anger storlek.

Vektor: $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}$

Anger storlek och riktning.

Tensor: $\vec{\vec{\tau}} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$

Anger storlek, riktning och angreppsyta.

τ_{yx}

Storlek, Normal till angreppet, Kraftens riktning

Symmetrisk: $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ Visas i appendix C.

Tecken på τ

Konvention: Positiv om normalvektor till angreppsytan och kraftens riktning har samma tecken!

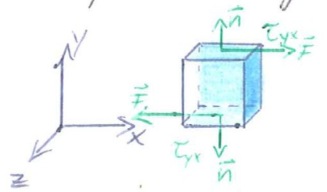


Fig 7.6

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right)$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \mu\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\right)$$

Hagen-Poiseuille's ekvation

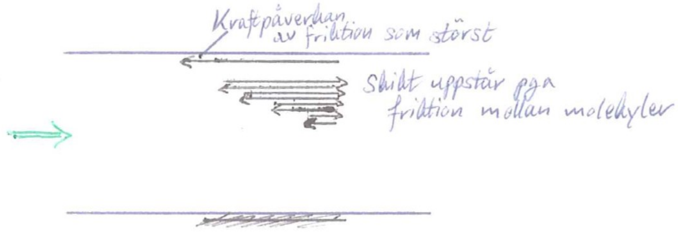
$$\boxed{-\frac{dP}{dx} = \frac{8\mu v_{avg}}{R^2}}$$

average

Antaganden

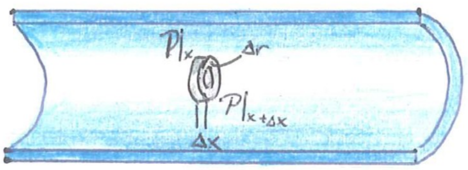
1. Fluidet
   a) Newtonsk
   b) Kontinuum
2. Strömningen
   a) Laminär
   b) Stationär
   c) Fullt utvecklad
   d) Inkompressibel
   (e) Horisontell)

Laminär rörströmning:



Balans: Rörelsemängd

Kontrollvolym: Mikroskopisk, differentiell



Rörelsemängdsbalans i x-led:

$$\sum F_x = \underbrace{\cancel{\iint_{c.s.} \rho v_x (\vec{v}\cdot\vec{n})\,dA}}_{=0,\ \text{fullt utvecklad}} + \underbrace{\cancel{\frac{\partial}{\partial t}\iiint \rho v_x\,dV}}_{=0,\ \text{stationärt}}$$

$$\Longrightarrow \sum F_x = 0$$

F5: 2008-11-03

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_x = \frac{P\cdot \cancel{2\pi} r\Delta r|_x - P\cdot \cancel{2\pi} r \Delta r|_{x+\Delta x}}{\cancel{\Delta r}\Delta x} + \frac{\tau_{rx}\cdot \cancel{2\pi} r \cancel{\Delta x}|_{r+\Delta r} - \tau_{rx}\cdot \cancel{2\pi} r\cancel{\Delta x}|_r}{\Delta r \cancel{\Delta x}} = 0$$

Låt $\Delta r \Delta x \to 0 \Longrightarrow \sum F_x = -r\frac{dP}{dx} + \frac{d}{dr}(r\tau_{rx}) = 0$

Fullt utvecklad strömning $\Rightarrow \frac{dP}{dx} = \text{konst.}$

Integrering ger: $\tau_{rx} = \frac{dP}{dx}\frac{r}{2} + \frac{C_1}{r}$

$\tau_{rx}|_{r=0}$ har ett begränsat värde $\Rightarrow C_1 = 0$. I annat fall hade $\tau_{rx} \to \infty$ = omöjligt!

$$\Rightarrow \boxed{\tau_{rx} = \frac{dP}{dx}\frac{r}{2}}$$

Hastighetsprofil

$v_x = v_x(r)$

$\tau_{rx} = \mu \frac{dv_x}{dr} = \frac{dP}{dx}\frac{r}{2}$

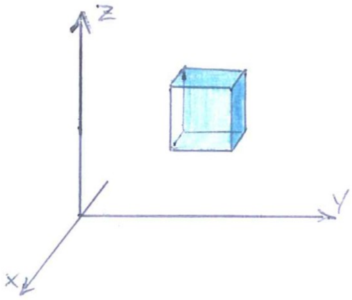
Integrering ger: $v_x(r) = \frac{1}{4\mu}\frac{dP}{dx} r^2 + C_2$

Då $v_x(R) = 0 \Longrightarrow C_2 = -\frac{1}{4\mu}\frac{dP}{dx}R^2$

$$\Rightarrow \boxed{v_x(r) = -\frac{dP}{dx}\frac{R^2}{4\mu}\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]}$$

$v_{max}\big|_{r=0} = -\frac{dP}{dx}\frac{R^2}{4\mu}, \quad \frac{dP}{dx} > 0$

Generell mikroskopisk massbalans



$$\iint_{CS} \rho(\vec{v}\cdot\vec{n})\,dA + \frac{\partial}{\partial t}\iiint \rho\, dV = 0$$

$$\frac{\left(\rho v_x\big|_{x+\Delta x} - \rho v_x\big|_x\right)\cancel{\Delta y \Delta z}}{\Delta x \cancel{\Delta y \Delta z}^{(*)}} + \frac{\left(\rho v_y\big|_{y+\Delta y} - \rho v_y\big|_y\right)\cancel{\Delta x \Delta z}}{\cancel{\Delta x}\Delta y\cancel{\Delta z}^{(*)}} +$$

$$+ \frac{\left(\rho v_z\big|_{z+\Delta z} - \rho v_z\big|_z\right)\cancel{\Delta x \Delta y}}{\cancel{\Delta x \Delta y}\Delta z^{(*)}} + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\left(\rho \cancel{\Delta x \Delta y \Delta z}\right)}{\cancel{\Delta x \Delta y \Delta z}^{(*)}} = 0$$

Dela med $\Delta x \Delta y \Delta z^{(*)} \to 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla(\rho\vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$$

Specialfall

Stationärt $\Longrightarrow \nabla(\rho\vec{v}) = 0$

Inkompressibelt $\Longrightarrow \boxed{\nabla\vec{v} = 0}$

Generell mikroskopisk rörelsemängdsbalans

$$\Sigma\vec{F} = \iint_{C.S.} \rho\vec{v}(\vec{v}\cdot\vec{n})\,dA + \frac{\partial}{\partial t}\iiint_{C.V.} \rho\vec{v}\,dV$$

Navier-Stokes ekvation

- Inkompressibel strömning
- Konstant viskositet

(- Laminär strömning)

$$\boxed{\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla\vec{v}\right) = \rho\vec{g} - \nabla P + \mu\nabla^2\vec{v}}$$

$\frac{D}{Dt}$: totala derivatan $\rho\frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla\vec{v}\right) = \rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + v_x\frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_y\frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + v_z\frac{\partial \vec{v}}{\partial z}\right)$

Substantiell

Rörligt koordinatsystem som rör sig med $\vec{v}$.

Eulers ekvation

- Ideal

$$\rho\frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho\dot{\vec{v}} + \rho\vec{v}\cdot\nabla\vec{v} = \rho\vec{g} - \nabla P$$

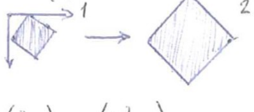
Obekanta: v_x, v_y, v_z, P

Ekvationer: 3 ekv. för hastighet + massbalans.

F:6: 2008-11-06

Dimensionsanalys
Uppskalning / Nedskalning
Fysikalisk förståelse
Reduktion av variabelantal

Likhet (similarity)

Geometrisk:  Förhållande i storlek mellan sidor detsamma

Kinematisk: $\left(\frac{v_x}{v_y}\right)_1 = \left(\frac{v_x}{v_y}\right)_2$

Dynamisk: Förhållande mellan krafter samma i skala 1 och 2.

Dynamisk likhet

Navier-Stokes ekvation: $\underbrace{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla\vec{v}}_{\text{Tröghet}} = \underbrace{\bar{g}}_{\text{Gravitation}} - \underbrace{\frac{\nabla P}{\rho}}_{\text{Tryck}} + \underbrace{\frac{\mu}{\rho}\nabla^2\vec{v}}_{\text{Friktion}}$ Kraft/massenhet

Gravitation: g

Tryck: $\nabla P \sim \frac{\Delta P}{\Delta L} \Longrightarrow \frac{P}{\rho L}$

Friktion: $\frac{\mu}{\rho}\frac{v}{L^2}$

Tröghet: $\frac{v^2}{L}$

$\frac{\text{Tröghet}}{\text{Friktion}} = \frac{v^2/L}{\frac{\mu}{\rho}\frac{v}{L^2}} = \frac{\rho L v}{\mu}$ Dimensionslöst tal!

$= Re$ (= Reynold)

$\frac{\text{Tryck}}{\text{Tröghet}} = \frac{P}{\rho v^2} = Eu$ (= Euler)

Teoridel ⇒ Utantill!

$\frac{\text{Tröghet}}{\text{Tyngd}} = \frac{v^2}{gL} = Fr$ (= Froude)

Dynamisk likhet = Dimensionslösa tal lika i skala 1 och 2.

Buckingham's π-teori

Hur många dimensionslösa tal behövs?

$\boxed{i = n - r}$

i = Antalet oberoende dimensionslösa tal
n = Antal variabler
r = Antal grundenheter (oftast). Mer exakt: rang hos dimensionsmatris, vilket motsvarar antalet kolumner i den största "nonzero"-determinant som kan bildas av matrisen.

Ex. Strömning runt fast kropp

Variabel	Enhet	Symbol
Kraft	$\frac{ML}{t^2}$	F
Hastighet	$\frac{L}{t}$	v
Densitet	$\frac{M}{L^3}$	ρ
Viskositet	$\frac{M}{Lt}$	μ
Längd	L	L

$n = 5$ $r = 3$

12

$\Rightarrow i = n - r = 5 - 3 = 2 \Rightarrow 2$ dimensionslösa tal!

Dimensionsmatris:

	F	v	ρ	μ	L
M	1	0	1	1	0
L	1	1	-3	-1	1
t	-2	1	0	-1	0

Positivt = Ovan bråkstreck
Negativt = Under bråkstreck

Dimensionslösa tal:

$\pi_1 = \underbrace{v^a \rho^b L^c}_{\text{Kärna}} F$ och $\pi_2 = \underbrace{v^d \rho^e L^f}_{\text{Kärna}} \mu$

Via insättning av enheterna i variablerna kan exponenterna a - f identifieras

$\Rightarrow \pi_1 = \frac{F}{L^2 \rho v^2} = Eu$ och $\pi_2 = \frac{\mu}{\rho v L} = \frac{1}{Re}$

Se Ex. 1 kap. 11 för stegvis beräkning
Tbl. 11.1 för variablers dimensioner
Tbl. 11.2 för vanliga dimensionslösa parametrar i momenttransport

Laminärt/Turbulent flöde

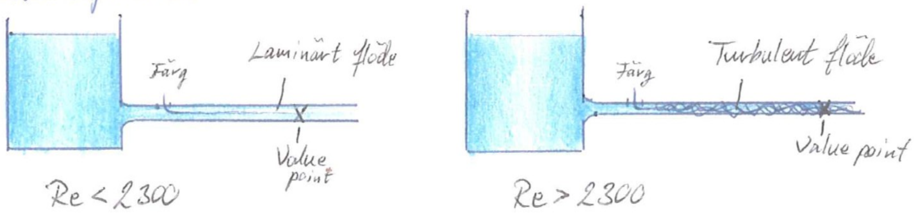
Vid ett värde på Reynolds tal (Re) på under det kritiska värdet

$\boxed{Re \sim 2300 = \frac{\text{Tröghet}}{\text{Friktion}} = \frac{\rho v L}{\mu}} \Rightarrow$ Laminärt flöde

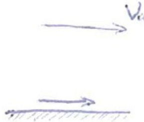
Vid flöde i rör: $L = D$

Vid ett värde på Re över $2300 \Rightarrow$ Turbulent flöde

Reynolds experiment:



Strömning runt kroppar



v_∞ Opåverkad hast.

Friktion uppstår vid ytan hos ett objekt pga skjuvspänning

$\frac{F}{A} = C_f \frac{\rho v_\infty^2}{2}$, vid ren friktion

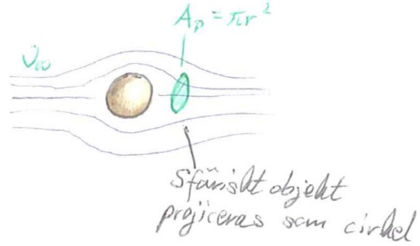
A: Faktisk yta
v_∞: Fria hastigheten (ej störd av friktion)
C_f: Friktionskoefficient, dimensionslös
F: Kraft på kroppen, orsakad av friktion

Ej ren friktion: (motstånd kan komma av tryck såväl som friktion)

$$\frac{F}{A_p} = C_D \frac{\rho v_\infty^2}{2}$$

C_D: Motståndskoefficient

A_p: Projicerade ytan hos objektet, vinkelrätt strömningen



F7: 2008-11-10

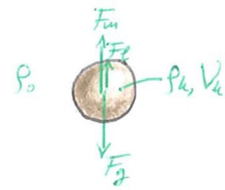
Maximal fallhastighet för en fast kropp, stationärt

Kraftjämvikt:

$$F_g = F_m + F_l$$

$$F_g = V_k \rho_k g; \quad F_l = V_k \rho_0 g$$

$$\Rightarrow F_m = C_D A_p \frac{\rho_0 v_{max}^2}{2} = V_k(\rho_k - \rho_0) g$$



g: gravitation
m: motstånd
l: lyftkraft
0: omgivning
k: kropp

Sfär: $V_k = \frac{\pi D_k^2}{6}$; $A_p = \frac{\pi D_k^2}{4}$

$$\Rightarrow v_{max} = \sqrt{\frac{4(\rho_k - \rho_0) g D_k}{3\rho_0 C_D}}$$

I ekvationen obekanta: v_{max} och C_D.

$C_D = C_D(Re)$; $Re = Re(v_{max})$

Iteration via startgissning ger v_{max}!

Gränsskikt boundary layer

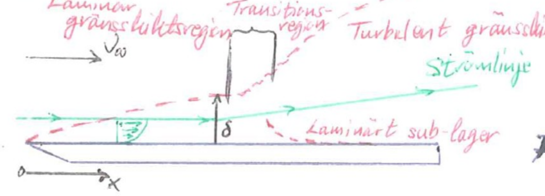


Fig. 12.5

δ: gränsskiktstjocklek, avstånd från ytan där $v = 0.99 v_\infty$.

Inga nämnvärda tryckförändringar över gränsskiktet.

Gränsskiktskonceptet (Brandt, 1904)

- Viskösa effekter endast betydelsefulla i ett tunt skikt nära väggen för höga Re.

- Försumbara tryckskillnader tvärs gränssnittet.

Gränsskiktsekvation, ekvationerna 12-7 och 12-8

$$\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}\right) = -\frac{dP}{dx} + \mu\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$$

En ekvation, tre okänta (v_x, v_y och P). P erhålles ur beräkningar med Euler's ekvation.

Massbalans: $\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$

Blausius' lösning

- Plan platta
- Laminärt gränsskikt
- Stationärt
- $v_\infty(x) = v_\infty$: $\frac{dP}{dx} = 0$

$$\frac{\delta}{x} = \frac{5}{\sqrt{Re_x}}$$

$$\tau_0 = \mu 0{,}332 v_\infty \sqrt{\frac{v_\infty}{\nu x}}$$

$C_{fx} = \frac{0{,}664}{\sqrt{Re_x}}$, koefficient för friktion vid ett specifikt värde på x.
ett spec. avstånd

$C_{fL} = \frac{1{,}328}{\sqrt{Re_L}}$, genomsnittlig friktionskoefficient för en platta med längden L.

F8: 2008-11-11

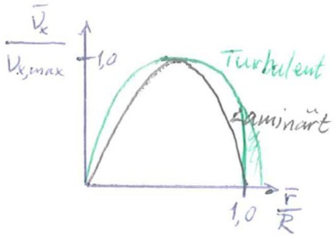
Turbulens se bild s. 13

Karaktäriserande egenskaper för turbulens:

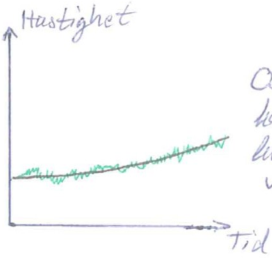
- Oregelbunden
-
-
- Tredimensionell och roterande
- Kontinuum
- Flödande

$Re_{kritisk}$ = Värde på Re då omslag sker mellan laminärt och turbulent flöde.

$$Re = \frac{\rho v L}{\mu} = \frac{\text{Tröghetskraft}}{\text{Friktionskraft}}$$



Jämförelse mellan turbulent och laminär hastighetsdistribution



Oscillerande hastighetskomponent, slumpvis, kring ett medelvärde *

Tidsmedelvärde *

I. $\tilde{v}_z = \bar{v}_z + v_z'$; $\quad \bar{v}_z = \frac{1}{t_0}\int_t^{t+t_0} v_z\,dt$

Faktisk hastighet; Tidsmedelvärde; Fluktuationer

II. Tidsmedelvärde av transportekvation

ex. kinetisk energi

$\overline{KE} = \frac{1}{2}\rho\left(\bar{v}_x^2 + \bar{v}_y^2 + \bar{v}_z^2\right)$ = Genomsnittlig kinetisk energi per volymsenhet.

$$\overline{(\bar{v}_z + v_z')^2} = \bar{v}_z^2 + \overline{2v_z'\bar{v}_z} + \overline{v_z'^2} = \left[\overline{v_z'\bar{v}_z} = \bar{v}_z'\bar{v}_z = 0\right]$$

$$= \bar{v}_z^2 + \overline{v_z'^2}$$

$$\Longrightarrow KE = \frac{1}{2}\rho\left(\bar{v}_x^2 + \bar{v}_y^2 + \bar{v}_z^2 + \overline{v_x'^2} + \overline{v_y'^2} + \overline{v_z'^2}\right)$$

= Medelvärdet av kinetiska energin + turbulent kinetisk energi

Ex. Tidsmedelvärde av Navier–Stokes ekvation

$\rho\overline{v_y'v_z'} = \tau_{yx}^{(t)}$, turbulent skjuvspänning. Denna orsakas av virvlarna, skjuvspänning har egentligen ingenting med ~~[illegible]~~ turbulens att göra.

k-ε-modellen för turbulens.

$\rho\overline{v_y'v_z'} \neq 0$

Längdskalor

λ: Molekylär skala, η: Kolmogorov-skala; ℓ: Makroskopisk skala

$$\frac{\lambda}{\eta} = \frac{Ma}{Re_\ell^{1/4}} \; ; \quad \frac{\eta}{\ell} = \frac{1}{Re_\ell^{3/4}}$$

$Ma = \frac{v}{a}$ $(Ma = \text{Mach})$

Tryckfall i rörsystem

Bernoulli's ekvation med friktionsförluster:

$$\boxed{y_1 + \frac{v_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\rho g} = y_2 + \frac{v_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\rho g} + \sum h_L}$$ förlustkomponent

Rör: $h_L = 2C_f \frac{L}{D}\frac{v^2}{g} = \frac{\Delta P}{\rho g}$

Om fullt utvecklad: $C_f = f_f\left(\frac{e}{D}, Re\right)$ $\quad \frac{e}{D}$ = Relativ ytråhet

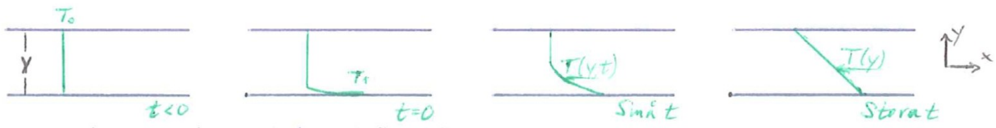
Rördetaljer: $h_L = K\frac{v^2}{2g} = \frac{\Delta P}{\rho g}$

Fullt turbulent?

Laminär strömning: $C_f = \frac{16}{Re}$, oberoende av $\frac{e}{D}$

Turbulent strömning: Höga $Re \rightarrow C_f$ är oberoende av Re, fullt utvecklad turbulens.

F9: 2008-11-14 Värmetransport



Initial temperatur $= T_0$

Nedre plattan får temp. höjd till T_1

Stationärt tillstånd

Konduktion

Stationärt: $\frac{q}{A} \propto \frac{\Delta T}{y} \Rightarrow \frac{q}{A} = k\frac{\Delta T}{y}$, k = värmekonduktivitet $\left[\frac{J}{m \cdot s \cdot K}\right]$ eller $\left[\frac{W}{mK}\right]$

$\frac{q_y}{A} = -k\frac{dT}{dy}$ (går från varmt till kallt $\Rightarrow$ Negativ lutning)

$\boxed{\frac{\bar{q}}{A} = -k\nabla T}$ Fouriers lag

Gaser: $k \propto \sqrt{T}$

Strömning

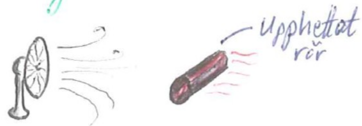
Den grundläggande transporten av värme sker med mediets förflyttning.

Konvektion: Värmeöverföring där strömning spelar en viktig roll.

$\boxed{\frac{q}{A} = h\Delta T}$ Newtons lag, där h = Värmeöverföringskoefficient $\left[\frac{W}{m^2K}\right]$

Det finns två fall av konvektion: påtvingad och fri (naturlig) konvektion.

Påtvingad konvektion



Värme tvingas åt höger av en påtvingad luftström.

Påtvingad konvektion har en yttre källa för strömningen.

Fri konvektion

Värme transporteras uppåt ~~av~~ med upphettad luft, vilken stiger.

Fri konvektion har ingen yttre källa för värmetransporten.
Strömning orsakas av skillnader i densitet, som kommer av temperaturvariationer hos fluiden, $\rho = \rho(T)$.

$h = h$(fluid, geometri, strömningsförhållanden, ΔT)

Strålning

$\frac{q}{A} = \sigma T^4$, energi som avges från svartkropp (perfekt strålningskälla),
där σ = Stefan-Boltzmann-konstanten $\left[\frac{W}{m^2K^4}\right]$

Att ta hänsyn till:

- Avvikelse från perfekt strålning (svart strålare), avvikelse från svartkropp
- Geometri 

Ledning

Temperaturprofil: Stationärt, 1D plan platta, ingen värmekälla.

$$\underbrace{\cancel{\text{Ackumulation}}}_{}^{=0,\ \text{stationärt}} = \underbrace{\text{Netto in}}_{IN - UT} + \overbrace{\cancel{\text{Produktion}}}^{=0} \Longrightarrow IN = UT$$

$$q_x\big|_x = q_x\big|_{x+\Delta x},\ \text{låt } \Delta x \to 0 \Rightarrow \frac{dq_x}{dx} = 0 \xrightarrow{\text{Integrering}} q_x = C_1$$

$$q_x = -kA\frac{dT}{dx},\ \text{Fouriers lag}$$

$$\xrightarrow{\text{Integrering}} T(x) = C_1' x + C_2;\quad C_1' = -\frac{q_x}{kA}$$

$$T(0) = C_2 = T_1;\ T(L) = C_1' L + T_1$$

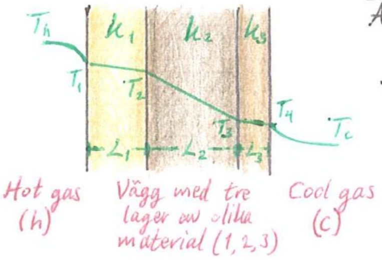
$$\boxed{\Rightarrow T(x) = T_1 - \frac{T_1 - T_0}{L}x}$$

Integrering av värmeflöde:

$$\frac{q_x}{A} = -k\frac{dT}{dx} \Rightarrow \int_{x=0}^{x=L} q_x\,dx = -\int_{T_1}^{T_0} kA\,dT \Rightarrow q_x\int_{x=0}^{x=L} dx = -kA\int_{T_1}^{T_0} dT$$

$$\Rightarrow \boxed{q_x = \frac{kA}{L}(T_1 - T_0)}$$

Ex.



$$\frac{q_x}{A} = h\Delta T,\quad \frac{q_x}{A} = -k\frac{dT}{dx}$$

$$\Rightarrow q_x = h_h A(T_h - T_1) = \frac{k_1 A}{L_1}(T_1 - T_2) = \frac{k_2 A}{L_2}(T_2 - T_3) =$$

$$= \frac{k_3 A}{L_3}(T_3 - T_4) = h_c A(T_4 - T_c)$$

$$\underbrace{T_h - T_1 = \frac{q_x}{h_h A}}_{(1)};\ \underbrace{T_1 - T_2 = \frac{q_x}{\frac{k_1 A}{L_1}}}_{(2)};\ \underbrace{T_2 - T_3 = \frac{q_x}{\frac{k_2 A}{L_2}}}_{(3)};\ \underbrace{T_3 - T_4 = \frac{q_x}{\frac{k_3 A}{L_3}}}_{(4)};$$

$$\underbrace{T_4 - T_c = \frac{q_x}{h_c A}}_{(5)}$$

Addition: (1) + (2) + (3) + (4) + (5) ⇒

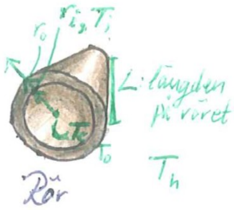
$$\underbrace{T_h - T_c}_{\Delta T} = \underbrace{q_x\ \frac{1}{h_h A} + \frac{L_1}{k_1 A} + \frac{L_2}{k_2 A} + \frac{L_3}{k_3 A} + \frac{1}{h_c A}}_{q_x \frac{1}{UA}}$$

U = Total värmegenomgångskoefficient $\left[\frac{W}{m^2 K}\right]$

$\frac{1}{h}$ = Värmemotstånd pga konvektion; $\frac{1}{k/L}$ = Värmemotstånd pga ledning

$\frac{1}{U} = \Sigma$ Motstånd

F 10: 2008-11-17



Ledning i cylinder, stationärt

Ledning radiellt, av Fouriers lag: $q_r = -kA\frac{dT}{dr}$

$A = 2\pi r L$

Integrerat flöde: $\int_{r_i}^{r_o} q_r \frac{dr}{r} = -\int_{T_i}^{T_o} k\, 2\pi L\, dT \Rightarrow q_r \int_{r_i}^{r_o} \frac{dr}{r} = -2\pi k L \int_{T_i}^{T_o} dT$

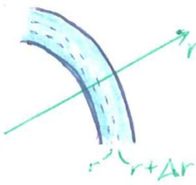
$$\Rightarrow \boxed{q_r \ln\frac{r_o}{r_i} = -2\pi k L (T_o - T_i)}$$

$$\Rightarrow q_r = \frac{2\pi k L (T_o \overset{(*)}{-} T_i)}{\ln\frac{r_o}{r_i}} = h_o A_o (T_h \overset{(*)}{-} T_o) = h_i A_i (T_i \overset{(*)}{-} T_c)$$

Lös ut temperaturskillnaderna (*) $\Rightarrow$

$$\boxed{\begin{gathered} U_o = \frac{1}{\frac{A_o}{A_i h_i} + A_o \ln\frac{r_o}{r_i}/(2\pi k L) + \frac{1}{h_o}} \\ q = U_o A_o \Delta T \end{gathered}}$$

Temperaturprofil



$$\underbrace{\cancel{\text{Ackumulation}}}_{=0,\ \text{stationärt}} = \text{IN} - \text{UT} + \underbrace{\cancel{\text{Produktion}}}_{=0} \Rightarrow \text{IN} = \text{UT}$$

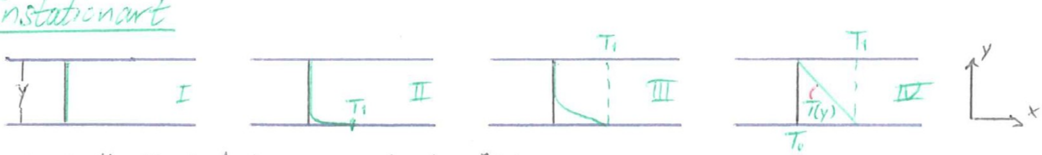
$q_r|_r = q_r|_{r+\Delta r}$, låt $\Delta r \to 0 \Rightarrow \frac{d}{dr} q_r = 0$

$q_r = -k \cdot 2\pi r L \cdot \frac{dT}{dr}$

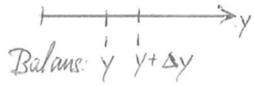
Insättning $\Rightarrow \frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) = 0 \xrightarrow{\text{Integrering}} T(r) = C_1 \ln r + C_2$

Randvillkor: $\left.\begin{aligned} T(r_i) &= T_i \\ T(r_o) &= T_o \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{T(r) = T_i - \frac{T_i - T_o}{\ln\frac{r_o}{r_i}} \ln\frac{r}{r_i}}$

Instationärt



Instationär ledning: 1D, plant. Sökt: $T(y,t)$



Ackumulation = IN − UT + $\overset{=0}{\cancel{\text{Produktion}}}$

$$(\rho A \Delta y) c_p \Delta T = \left(q_y\big|_y - q_y\big|_{y+\Delta y} \right) \Delta t$$

Dela med $\Delta y \Delta t \to 0 \implies \dfrac{\rho A c_p \Delta T}{\Delta t} = \dfrac{q_y\big|_y - q_y\big|_{y+\Delta y}}{\Delta y}$

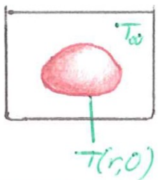
$$\xrightarrow{\Delta y \Delta t \to 0} \rho A c_p \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial q_y}{\partial y}$$

$$q_y = -kA\frac{dT}{dy} \implies \boxed{\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}}$$

$T(0,t) = T_1$
$T(\infty, t) = T_\infty$
$T(y,0) = T_0$

F: 11: 2008-11-20

Tillagning av julskinka



Sfäriska koordinater

Ledning: $\rho c_p \dfrac{\partial T}{\partial t} = k \dfrac{1}{r^2} \dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \dfrac{\partial T}{\partial r} \right)$

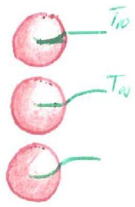
Konvektion: $q = hA(T_\infty - T_{yta})$

$$\boxed{Bi = \frac{hL}{k}} = \frac{\text{inre värmemotstånd}}{\text{yttre värmemotstånd}}, \quad \text{Biot-tal (Biot modulus)}$$

$Bi \gg 1$: Inre motstånd dominerar

$Bi \ll 1$: Yttre motstånd dominerar

$Bi \sim 1$: Båda motstånd dominerar



Enkel lösning

Komplicerad lösning
Diagram Appendix F

Diagramlösning

$Bi > 0{,}1 \implies$ Lösningsgång i Appendix F kan användas!

- $Bi \ll 1$

Tillförd energi = Ackumulerad energi

$$hA(T_\infty - T) = \rho c_p V \frac{dT}{dt}, \quad T_{yta} \sim T$$

$T(0) = T_0$

$$\implies \frac{T(t) - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = e^{-\frac{hAt}{\rho V c_p}}$$

Julskinkan

Sfärisk skinka...!

Sökt: Tid fram tills att skinkan är färdigkokt/ugnsbakad, då

$T_{centrum} = 70°C$

Data: $T_0 = 22°C$; $k = 0{,}981\ J/m \cdot s \cdot K$; $\rho = 1{,}6 \cdot 10^3\ kg/m^3$

$c_p = 3{,}5\ kJ/kg\,K$; $m = 2{,}3\ kg$; $D = 0{,}14\ m$

Fallet ugn	Fallet ledning
$h = 4\ W/m^2K$	$h = 4000\ W/m^2K$
$T_\infty = 200°C$	$T_\infty = 100°C$
$X = ?$	$Y = 0{,}39$
$Y = \frac{T_\infty - T_c}{T_\infty - T_0} = 0{,}73$	$X = ?$
$n = x/x_1 = 0$	$n = 0$
$m = k/hx_1 = 3{,}5$	$m = 3{,}5 \cdot 10^{-3}$
Avläsning i diagram:	$\Rightarrow X = 0{,}15$
$X = \frac{\alpha t}{x_1^2}$	$\Rightarrow t = 1{,}2\ h$
$\Rightarrow t = 0{,}7\ h$	

Generella mikroskopiska transportekvationen för värme

Balans över differentiell volym: Ackumulation = In - Ut + Produktion

Två mekanismer $\Rightarrow$ ekvation med T och q.

Fouriers lag $\Rightarrow$ ekvation med enbart T.

Generell värmetransportsekvation

($c_p \sim c_v$, fasta kroppar och vätskor)

ρ och k konstanta

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \bar{v} \cdot \nabla T \right) = k \nabla^2 T + q$$

Ackumulation, Strömning, Ledning, Produktion

Navier-Stokes ekv.: ρ och μ konstanta

$$\rho \frac{D\bar{v}}{Dt} = \rho \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{v} \cdot \nabla \bar{v} \right) = \mu \nabla^2 \bar{v} + \rho g - \nabla P$$

Ackumulation Strömning Friktion Produktion

Konvektion

$q = hA\Delta T$

Dimensionsanalys

Påtvingad konvektion $\Rightarrow Nu = Nu(Re, Pr)$,

alternativt $St = \frac{Nu}{Re\,Pr} = St(Re, Pr)$

Naturlig konvektion $\Rightarrow Nu = Nu(Gr, Pr)$

Viktiga parametrar

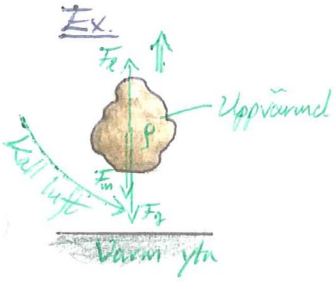
Nusselt: $Nu = \frac{hL}{k} = \frac{\text{Värmetransport med konvektion}}{\text{Värmetransport med ledning (utsidan)}}$. Definierad på utsidan

Prandtl: $Pr = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\mu c_p}{k} = \frac{\text{Betydelse av rörelsemängdstransport}}{\text{Betydelse av värmetransport}}$

Reynold: $Re = \frac{\rho v L}{\mu} = \frac{\text{Tröghetskraft}}{\text{Friktionskraft}}$

Grashof: $Gr = \frac{\beta g \rho^2 L^3 \Delta T}{\mu^2}$; $\rho = \rho_0(1 - \Delta T\beta)$, β = Volym-utvidgnings-koefficient

Ex.



Krafter:

$$\left.\begin{array}{l} F_g = \rho V g \\ F_\ell = \rho_0 V g \end{array}\right\} \text{Nettolyftkraft} = F_\ell - F_g = \rho_0 V \beta \Delta T g$$

$$Gr = \frac{F_\ell - F_g}{\mu^2/\rho} = \frac{\text{Nettolyftkraft}}{\text{"Friktionsmotstånd"}}$$

Vindfaktorn: Värmeöverföring påverkas.

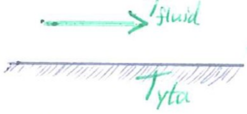
$q = hA\Delta T$

q_{verklig}	$q_{\text{fiktivt vindstilla}}$
h stort	h litet
ΔT "litet"	ΔT "stort"

F12: 2008-11-24

Korrelationer för konvektiv värmeöverföring kap. 20

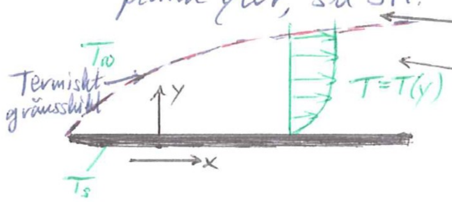
1. Strömningsfall?
2. Tillämpningsområde?
3. Karaktäristisk längd?
4. Bulk- eller filmtemperatur?



$$T_{film} = \frac{T_{fluid} + T_{yta}}{2}$$

Påtvingad konvektion hos interna flöden, turbulenta flöden, sid 308.

Påtvingad konvektion hos externa flöden, flöden parallellt med plana ytor, sid 311.



Laminärt gränsskikt för värme

$Nu_x = \frac{h_x x}{k} = 0{,}332 Re_x^{1/2} Pr^{1/3}$, för en specifik position.

$Nu_L = \frac{hL}{k} = 0{,}664 Re_L^{1/2} Pr^{1/3}$, medel över längden L.

Materialdata för film-temperaturen används!

Förhållande mellan δ och δ_T, dynamiskt respektive termisk gränsskikt:

$\frac{\delta}{\delta_T} = Pr^{1/3}$, $Pr = \frac{\nu}{\alpha}$, dimensionslöst tal

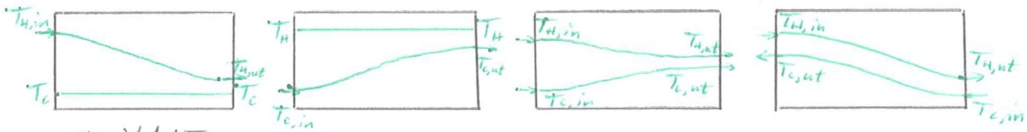
$Pr = 1 \Rightarrow \delta = \delta_T$, ungefärligt för gaser.

Analogi: $\frac{Nu}{Re_L Pr^{1/3}} = \frac{0{,}664}{Re_L^{1/2}} = \frac{C_{fL}}{2}$, Reynolds analogi

Chilton-Colburn-analogin

$$\boxed{j_H = j_D = \frac{C_f}{2}} \qquad j_H = \frac{Nu}{Re\,Pr^{1/3}}\,; \quad j_D = \frac{Nu_{AB}}{Re\,Sc^{1/3}}$$

Korrelationer för konvektiv värmeöverföring



$q = UA\Delta T_{lm}$

För cylinder: $U, \Delta T = ?$

$$\frac{1}{UA_o} = \frac{1}{A_i h_i} + \frac{\ln\frac{r_o}{r_i}}{2\pi kL} + \frac{1}{A_o h_o}$$

Värme-resistans konvektivt insida; Värme-resistans ledning rörvägg; Värme-resistans konvektivt utsida

$$\Delta T_{lm} = \frac{\Delta T_2 - \Delta T_1}{\ln\frac{\Delta T_2}{\Delta T_1}},$$ lm = logarithmic mean

Gäller både med- och motströms

[Om $\frac{\Delta T_2}{\Delta T_1} < 1{,}5$ $\Rightarrow \Delta T_{lm} \sim \Delta T_{aritmetisk} = \frac{\Delta T_1 + \Delta T_2}{2}$]

Överförd energi varmt → kallt
$$\begin{cases} dq = U\,dA\,(T_H - T_C) \\ dq = (\dot{m}c_p)_H\, dT_H & \text{Avgivet värme, varm ström} \\ dq = (\dot{m}c_p)_c\, dT_C & \text{Upptaget värme, kall ström} \end{cases}$$

Ex. 1, s 342

$A = ?$

$q = UA\Delta T_{lm}$

$U = 250\ \mathrm{W/m^2K}$

Data

Flöden	Olja (varm)	Vatten (kallt)
c_p	0,5 kg/s	0,201
T_{in}	375 K	280 K
T_{ut}	350 K	?

$q = q_{varm} = 0{,}5 \cdot 2090 \cdot (-25) = 26\,125\ \mathrm{W}$

$= q_{kall} = 0{,}201 \cdot 4177 \cdot (T_{c,out} - 280) \Longrightarrow T_{c,out} = 311{,}1\ \mathrm{K}$

$$\Delta T_{lm}(\text{medströms}) = \frac{95 - 38{,}9}{\ln\frac{95}{38{,}9}} = 62{,}8\ \mathrm{K}$$

$$\Delta T_{lm}(\text{motströms}) = \frac{70 - 63{,}9}{\ln\frac{70}{63{,}9}} = 66{,}9\ \mathrm{K}$$

Slutsats: Medströms: $A = 1{,}66\ \mathrm{m^2}$, Motströms: $A = 1{,}56\ \mathrm{m^2}$

25

F13: 2008-11-27 Masstransport

Värmetransport

Ledning: $\frac{q_z}{A} = -k \frac{dT}{dz} \left[\frac{J}{msK}\right]$, Konvektion: $\frac{q}{A} = h\Delta T \left[\frac{J}{m^2 sK}\right]$

Fouriers lag

Masstransport

Diffusion:

Fick's lag: $J_{A,z} = -cD_{AB}\frac{dy_A}{dz} \left[\frac{mol}{m^2 s}\right]$ Fraktion av ämne A

D_{AB}: Diffusiviteten av A i blandningen A − B $[m^2/s]$.

c: Total koncentration $[mol/m^3]$

Konvektion

$N_A = k_c \Delta c_A \left[\frac{mol}{m^2 s}\right]$ k_c: Massöverföringskoefficient $\left[\frac{m}{s}\right]$ (Mass transfer coefficient)

Diffusiviteter

Gaser: $D = \frac{T^{1,75}}{p\sqrt{M}}$ $[5\cdot 10^{-6}, 10^{-5}]$ $\frac{m^2}{s}$

Vätskor: Stokes-Einstein: $D_{AB} = \frac{kT}{6\pi r \mu_B}$, Nernst: $D_{AB} = \frac{2RT}{\left(\frac{1}{\lambda_+^0} + \frac{1}{\lambda_-^0}\right)F}$ Faradays konstant

Fast: $[10^{-10}, 10^{-11}]$ m^2/s

Poröst: $D_{A,eff} = D_{AB}\frac{\theta}{\tau}$, θ: Porositet, τ: Tortuositet

Komplicitet

Trots att Fourier's och Fick's lagar är analoga, så är masstransport mer komplicerat än värmetransport. Inverkande faktorer:

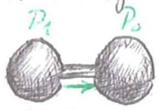
- Många komponenter
- Fick's lag definierad relativt ett koordinatsystem, som rör sig med blandningens medelhastighet.

(- Andra drivande krafter)

Ex.

Orsaker till diffusion

- Värmerörelse
- Lika stor sannolikhet alla riktningar.
- Nettotransport sker från hög till låg koncentration.

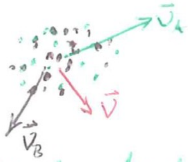


$P_1 > P_2$

Strömning för att utjämna tryck + diffusion

Diffusionshastighet

$\vec{v}_i - \vec{v}$ $\quad$ $\vec{v}_i$: Komponent i:s hastighet, $\vec{v}$: Blandningens medelhastighet.



$\frac{c_A\vec{v}_A + c_B\vec{v}_B}{c_A + c_B}$, baserat på mol-koncentrationer.

Fick's lag för diffusion

Total transport av A

$$J_{A,z} = -cD_{AB}\frac{dy_A}{dz} \propto v_{A,z} - v_z \Longrightarrow \underbrace{J_{A,z}}_{\frac{mol\,A}{m^2 s}} = -cD_{AB}\frac{dy_A}{dz} = \underbrace{c_A}_{\frac{mol\,A}{m^3}}(\underbrace{v_{A,z}}_{\frac{m}{s}} - v_z) = \underbrace{c_A v_{A,z}}_{N_{A,z}} - c_A v_z$$

$$c_A v_z = c_A \frac{c_A v_{A,z} + c_B v_{B,z}}{c} = y_A \underbrace{(\underbrace{c_A v_{A,z}}_{N_{A,z}} + \underbrace{c_B v_{B,z}}_{N_{B,z}})}_{\text{Total rörelse av blandningen}}$$

$$\boxed{\underbrace{N_{A,z}}_{\text{Total transport av A}} = \underbrace{-cD_{AB}\frac{dy_A}{dz}}_{\text{Diffusion av A}} + \underbrace{y_A(N_{A,z} + N_{B,z})}_{\text{Strömning av A}}} \quad (1)$$

Ämne B:

$$N_{B,z} = -cD_{BA}\frac{dy_B}{dz} + y_B(N_{A,z} + N_{B,z}) \quad (2)$$

Relation mellan D_{AB} och D_{BA}

Addera ekvationerna: $(1)+(2) \Longrightarrow \cancel{N_{A,z}+N_{A,B}} = -cD_{AB}\frac{dy_A}{dz} - cD_{BA}\frac{dy_B}{dz} +$

$$+ \underbrace{(y_A + y_B)}_{=1}\cancel{(N_{A,z} + N_{B,z})}$$

$$\Longrightarrow 0 = -cD_{AB}\frac{dy_A}{dz} - cD_{BA}\left(-\frac{dy_A}{dz}\right) \Longrightarrow \boxed{D_{AB} = D_{BA}}\ !$$

Specialfall

(I) Ekvimolekylär motriktad diffusion

$\vec{N}_A = -\vec{N}_B \Rightarrow \vec{N}_A = \boxed{-cD_{AB}\nabla y_A}$

(II) Diffusion genom stagnant komponent, $N_B = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{N}_A = -cD_{AB}\nabla y_A + y_A \vec{N}_A}$

Totalt flux

$$\underbrace{\vec{N}_A}_{\text{Totalt}} = \underbrace{-cD_{AB}\nabla y_A}_{\text{Diffusion } (=\vec{J}_A)} + \underbrace{y_A(\vec{N}_A + \vec{N}_B)}_{\text{Bulkströmning (bulk flow)}}$$

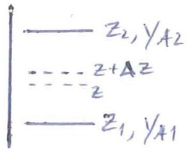
F14: 2008-12-01

Ekvimolekylär motriktad diffusion

Endimensionellt, cD_{AB} konstant, steady state, plant.

$N_{A,z} = -N_{B,z}$

$N_{A,z} = -cD_{AB}\dfrac{dy_A}{dz}$ (*)



Totalt flux:

$\vec{N}_A = -cD_{AB}\nabla y_A + y_A(\vec{N}_A + \vec{N}_B)$

Integrerat flux:

$$\int_{z_1}^{z_2} N_{A,z}\,dz = -\int_{y_{A1}}^{y_{A2}} cD_{AB}\,dy_A \Rightarrow N_{A,z}\int_{z_1}^{z_2} dz = -cD_{AB}\int_{y_{A1}}^{y_{A2}} dy_A$$

$$\Rightarrow \boxed{N_{A,z} = \frac{+cD_{AB}}{z_2 - z_1}(y_{A1} - y_{A2})}$$

Koncentrationsprofil: $y_A(z)$

$\underbrace{\cancel{\text{Ackumulation}}}_{\text{stationärt}} = \text{In} - \text{Ut} + \underbrace{\cancel{\text{Produktion}}}_{=0} \Rightarrow \text{In} = \text{Ut}$

$\Rightarrow A N_{A,z}\big|_z = A N\big|_{z+\Delta z}$, låt $\Delta z \to 0 \Rightarrow \dfrac{dN_{A,z}}{dz} = 0$

Sätt in Fick's lag (*)

$$\Rightarrow \frac{d^2 y_A}{dz^2} = 0 \xrightarrow{\text{Integrering}} y_A(z) = C_1 z + C_2,\quad y_A(z_1) = y_{A1},\ y_A(z_2) = y_{A2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{y_A(z) - y_{A1}}{y_{A1} - y_{A2}} = \frac{z - z_1}{z_1 - z_2}}$$

Diffusion genom stagnant komponent (unimolekylär)

$N_{B,z} = 0$

$$N_{A,z} = -cD_{AB}\frac{dy_A}{dz} + y_A N_{A,z} \Longrightarrow N_{A,z} = -\frac{cD_{AB}}{1-y_A}\frac{dy_A}{dz}$$

Integrerat flux: $N_{A,z}\int_{z_1}^{z_2} dz = -cD_{AB}\int_{y_{A1}}^{y_{A2}} \frac{dy_A}{1-y_A} \Longrightarrow \boxed{N_{A,z} = \frac{cD_{AB}}{z_2-z_1}\ln\frac{1-y_{A2}}{1-y_{A1}}}$

Koncentrationsprofil:

$$\frac{dN_{A,z}}{dz} = 0 \Longrightarrow \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-y_A}\frac{dy_A}{dz}\right) \Longrightarrow \boxed{\frac{1-y_A(z)}{1-y_{A1}} = \left(\frac{1-y_{A2}}{1-y_{A1}}\right)^{\frac{z-z_1}{z-z_2}}}$$

B olöslig i vätskan A: Fig 26.1, Arnold-cell

$N_{B,z}(z-z_1) = 0$, $N_{B,z} = ?$

Skalbalans på B: In = Ut

$$\frac{dN_{B,z}}{dz} = 0 \Longrightarrow N_{B,z} = \text{konstant} = 0 \text{ överallt}$$

Ekvimolekylär motriktad diffusion

A: Diffusion; $-cD_{AB}\frac{dy_A}{dz}$; $\longrightarrow$; strömning $= 0$

B: Diffusion; $+cD_{AB}\frac{dy_B}{dz}$; $\longleftarrow$; strömning $= 0$

Diffusion genom stagnant komponent

A: Diffusion; $-cD_{AB}\frac{dy_A}{dz}$; $\longrightarrow$ } Förstärkning

Strömning; $y_A N_{A,z}$; $\longrightarrow$

B: Diffusion; $+cD_{AB}\frac{dy_B}{dz}$ $\longrightarrow$ } Netto: $N_{B,z} = 0$

Strömning: $y_B N_{A,z}$ $\longleftarrow$

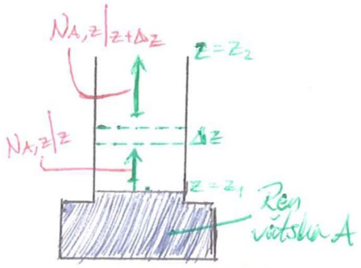
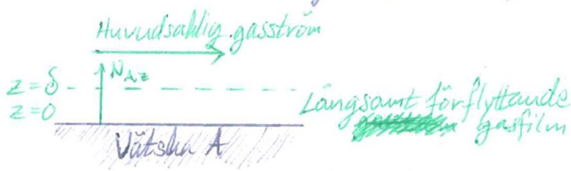


Fig 26.1, Arnold diffusion cell

Filmmodellen

Konvektiv massöverföring

$N_A = k_c \Delta c_A$



Den påtvingade konvektionen modelleras med en tunn film δ, genom vilken masstransport sker.

Anteckningar skrivna av Jonas Elmwall
Lp2 2008

$$N_{A,z} = \frac{D_{AB}}{\underbrace{z_2 - z_1}_{=\delta}}(c_{A1} - c_{A2}) \Rightarrow \boxed{k_c = \frac{D_{AB}}{\delta}}$$

Beror enbart på strömningsbild, ej komponent. Fiktiv

Instationär masstransport

Enbart diffusion, endimensionellt, plant. c och D_{AB} konstanta.

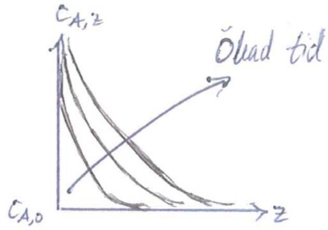


Fig 27.1 Transient diffusion in a semi-infinite medium

Ackumulation = In − Ut + ~~Produktion~~ $=0$

$$(\underbrace{\cancel{A \Delta z}}_{\text{volym}})\frac{\partial c_A}{\partial t} = \frac{N_{A,z}A|_z - N_{A,z}A|_{z+\Delta z}}{\Delta z}, \quad \Delta z \to 0 \Rightarrow \frac{\partial c_A}{\partial t} = -\frac{\partial N_{A,z}}{\partial z}$$

$$N_{A,z} = -D_{AB}\frac{dc_A}{dz} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial c_A}{\partial t} = D_{AB}\frac{\partial^2 c_A}{\partial z^2}}$$

$$\left.\begin{array}{l} c_A(0,t) = c_{A,s} \\ c_A(\infty,t) = c_{A,0} \\ c_A(z,0) = c_{A,0} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\frac{c_A(z,t) - c_{A,0}}{c_{A,s} - c_{A,0}} = \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{D_{AB}t}}\right)}$$

Ex. Katten Felix?

$$\left.\begin{array}{l} z = 4\sqrt{D_{AB}} \\ z = 10 \text{ m} \\ D_{AB} \approx 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s} \end{array}\right\} \Rightarrow t \sim 10^6 \text{ s}$$

Jämförelse

Rörelsemängd: $\frac{\partial v_x}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$

Värme: $\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$

Massa: $\frac{\partial c_A}{\partial t} = D_{AB}\frac{\partial^2 c_A}{\partial y^2}$

F15: 2008-12-02

Generell differentiell transportekvation för massa

- Kontrollvolymbalans
- Relation för massfluxet

Balans för komponent A: Ackumulation = In − Ut + Produktion

Kontrollvolymbalans:

$$\frac{\partial \rho_A}{\partial t}\Delta x\Delta y\Delta z = n_{A,x}\Delta y\Delta y\big|_x - n_{A,x}\Delta y\Delta z\big|_{x+\Delta x} + n_{A,y}\Delta x\Delta z\big|_y - n_{A,y}\Delta x\Delta z\big|_{y+\Delta y} +$$

$$+ n_{A,z}\Delta x\Delta y\big|_z - n_{A,z}\Delta x\Delta y\big|_{z+\Delta z} + r_A\Delta x\Delta y\Delta z$$ Produktionshastighet

Dela med $\Delta x\Delta y\Delta z \to 0 \Rightarrow \dfrac{\partial \rho_A}{\partial t} = -\left(\dfrac{\partial n_{A,x}}{\partial x} + \dfrac{\partial n_{A,y}}{\partial y} + \dfrac{\partial n_{A,z}}{\partial z}\right) + r_A$

A: $\dfrac{\partial \rho_A}{\partial t} = \nabla\cdot\vec{n}_A + r_A$, B: $\dfrac{\partial \rho_B}{\partial t} = \nabla\cdot\vec{n}_B + r_B$

$$\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{(\rho_A+\rho_B)}_{\rho} = -\nabla\cdot(\vec{n}_A+\vec{n}_B) + \underbrace{(r_A+r_B)}_{=0} = \rho_A\vec{v}_A + \rho_B\vec{v}_B = \rho\vec{v}$$

Fortsatt härledning för komponent A:

$\underbrace{\vec{n}_A}_{\text{Totalt massflux kg/m}^2\text{s}} = \underbrace{-\rho D_{AB}\nabla w_A}_{\text{Diffusion}} + \underbrace{\rho_A\vec{v}}_{\text{Strömning}}$ (tabell 24.2) w_A: Massbråk (el ω_A)

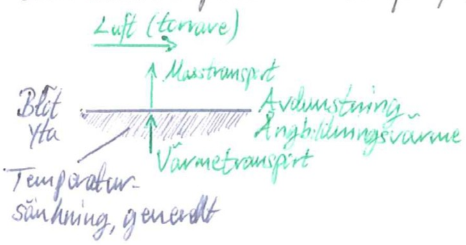
Insättning ger: $\dfrac{\partial \rho_A}{\partial t} = \nabla\cdot(\rho D_{AB}\nabla\omega_A) - \nabla\cdot(\rho_A\vec{v}) + r_A$

Antag ρ, D_{AB} konstanta, $(\vec{v}=0)$. Dividera med M_A, då $c_A = \dfrac{\rho_A}{M_A}$. Vi går alltså över till molära koncentrationer.

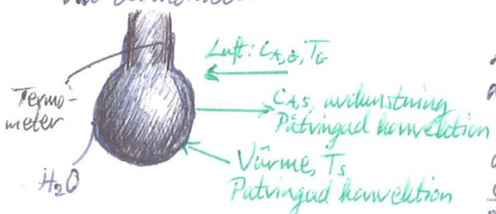
$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial c_A}{\partial t} = D_{AB}\nabla^2 c_A - \vec{v}\cdot\nabla c_A + R_A}$$

Kopplad transport

Den "våta" temperaturen. Varför fryser man när man är blöt?



Våt termometer



All energi för avdunstningen tas från omgivande strömmande gas.

$$q = hA(T_G - T_S) = N_A A M_A \Delta H_{vap}$$

Konvektivt tillförd värme — Värme som behövs för avdunstning

$$N_A = k_c(c_{A,s} - c_{A,G})$$

$$\boxed{T_G - T_S = \frac{k_c}{h} M_A \Delta H_{vap}(c_{A,s} - c_{A,G})}$$

T_G: Faktisk temperatur
T_S: Våttemperatur

F16: 2008-12-04

Konvektion

$Nu_{AB} = Nu_{AB}(Re, Sc)$, Påtvingad konvektion (forced)

$Nu_{AB} = Nu_{AB}(Gr, Sc)$, Naturlig konvektion (free)

Konvektiv värme- och massöverföring

	Värme	Massa
Flux	$\frac{q}{A} = h\Delta T$	$N_A = k_c \Delta c_A$
	$Nu = \frac{hL}{k}$	$Nu_{AB} = \frac{k_c L}{D_{AB}}$
Påtvingad konvektion	$Nu = Nu(Re, Pr)$	$Nu_{AB} = Nu_{AB}(Re, Sc)$
Naturlig konvektion	$Nu = Nu(Gr, Pr)$	$Nu_{AB} = Nu_{AB}(Gr_{AB}, Sc)$
	$Pr = \frac{\nu}{\alpha}$	$Sc = \frac{\nu}{D_{AB}}$
	$\rho = \rho(T)$	$\rho = \rho(\rho_A)$, $\rho_A = \frac{\text{Massa A}}{\text{Total volym}}$

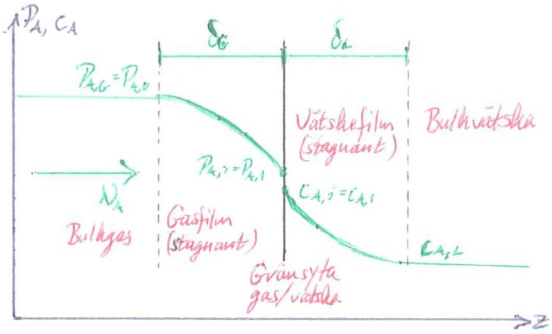
Gränsskikt

Fig. 28.2

Chilton-Colburn-analogin

$$j_H = j_D = \frac{C_f}{2}; \quad j_H = St\,Pr^{2/3}; \quad j_D = \frac{k_c}{v_\infty} \cdot Sc^{2/3}$$

Två-filmsteorin



I fasgränsytan råder kemisk jämvikt: $p_{A,i} = m c_{A,i}$ — Jämviktskonstant

Masöverföringsmotstånd, stationärt

$$N_{A,z} \overset{(*)}{=} k_G (p_{A,G} - p_{A,i}) = k_L (c_{A,i} - c_{A,L})$$

k_G: konvektiv massöverföringskoefficient, gas fas

k_L: konvektiv massöv.koeff., vätskefas

$p_{A,i}$ och $c_{A,i}$ "går ej" att mäta

$$K_G (p_{A,G} - p_A^*) = K_L (c_A^* - c_{A,L}), \quad p_A^* = m c_{A,L}, \quad p_A \overset{(**)}{=} m c_A, \quad c_A^* = \frac{1}{m} p_{A,G}$$

K_G: Total ~~mass~~ massöverföringskoefficient, i termer av partialtryckets från gasfasens drivkraft.

K_L: Total massöverföringskoefficient, i termer av vätskefaskoncentrationens drivkraft.

$$\frac{1}{K_G} = \frac{1}{k_G} + \frac{m}{k_L} \qquad \text{(Seriekoppling av resistanser)}$$

$$\frac{1}{K_L} = \frac{1}{m k_G} + \frac{1}{k_L}$$

Totalt motstånd — Motstånd gassida — Motstånd vätskesida

Härledning av K_G

$$\frac{1}{K_G} = \frac{p_{A,G} - p_A^*}{N_{A,z}} = \underbrace{\frac{p_{A,G} - p_{A,i}}{N_{A,z}}}_{= \frac{1}{k_G} \text{ av } (*)} + \frac{p_{A,i} - p_A^*}{N_{A,z}} = \frac{1}{k_G} + \frac{m (c_{A,i} - c_{A,L})}{N_{A,z}} = \frac{1}{k_G} + \frac{m}{k_L}$$

$= m(c_{A,i} - c_{A,L})$ av $(**)$

$= \frac{m}{k_L}$ av $(*)$

AV JE